Collection Spirales

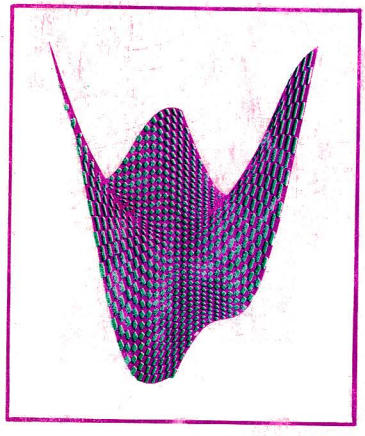
Mathématiques

Exercices et Problèmes Corrigés

Géométrie et Statistique

6ème année

Mathématiques
Sciences Expérimentales
Techniques



Ben Bader Mejdi
El Ouni Mongi
Ben Saâd Ridha
Juini Habib

Sommaire

1 Angles Orientés 5

2 Formules Trigonométriques 18

3 Equations et Inéquations Trigonométriques 35

4 Produit scalaire dans le plan 47

5 Cercles et Angles 63

6 Transformations dans le plan 75

7 Projection dans l'espace..... 97

8 vecteurs de l'espace 105

9 Droites et plans de l'espace 114

10 Produit scalaire dans l'espace 127

11 La Sphère 142

12 Homotheties et Translations de l'espace 150

13 Statistique 170

ANGLES ORIENTES

Exercices

Exercice 1

1) On donne un angle orienté de demi-droites $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ de mesure α en radians.

Déterminer sa mesure principale en radians dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha = \frac{17\pi}{16}$ rd b) $\alpha = \frac{-31\pi}{4}$ rd

c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rd d) $\alpha = \frac{175}{8}\pi$ rd

2) On donne un angle orienté de demi-droites $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Ot})$ de mesure β en degrés.

Déterminer sa mesure principale en degrés dans chacun des cas suivants :

a) $\beta = -150°$ b) $\beta = 2130°$

c) $\beta = -200°$ d) $\beta = -1785°$

3) On donne un angle orienté de demi-droites $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov})$ de mesure γ en grades.

Déterminer sa mesure principle en grades dans chacun des cas suivants :

a) $\gamma = 1250$ gr b) $\gamma = -210$ gr

c) $\gamma = 100$ gr d) $\gamma = -3200$ gr

Exercice 2

On considère deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tels que $(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = \frac{13\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in Z$

1) Déterminer en radians la mesure principaple de cet angle orienté.

2) Les réels $\frac{-15\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$ sont-ils des mesures de cet angle orienté ?

3) Déterminer une mesure α de cet angle orienté appartenant à $]-12\pi, -10\pi[$.

Exercice 3 (N.C)

Le plan étant orienté, on désigne par $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan P et par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de P.

1) Placer les points N de $\mathcal{C}$ tels que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{ON}}) = k\pi$ où $k \in Z$

Déterminer les coordonnées de ces points.

2) On considère les points M de $\mathcal{C}$ tels que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ où $k \in Z$

a) Placer ces points et déterminer leurs coordonnées.

b) Montrer par deux méthodes différentes que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 4

On considère deux demi-droites distinctes [Ox) et [Oy) telles que $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

On cherche à déterminer les demi-droits [Oz) telles que $2(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ (*)

1) Montrer qu'il existe deux demi-droites $[Oz_1)$ et $[Oz_2)$ qui vérifient la relation (*).

Faire un dessin dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{3}$

2) Que peut-on dire de $[Oz_1)$ et $[Oz_2)$?

Exercice 5

On considère un triangle ABC et on appelle α, β et γ les mesures principales respectives en radians des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

1) Prouver que $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = \pi$

2) Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ou $\alpha + \beta + \gamma = -\pi$

3) En déduire que α, β et γ sont de même signe.

Exercice 6

L'unité étant le cm, on considère les points O, A, B, C et D tels que :

$OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 5$ et $OD = 4$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{13\pi}{3}$ [2π] ; $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{-19\pi}{6}$ [2π] et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{97\pi}{6}$ [2π]

1) a) Déterminer la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$

b) Déterminer en radians la mesure principale de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

2) a) Construire les points O, A, B, C et D.

b) Que peut on dire des points O, B et D ? Prouver le.

Exercice 7

On considère les points A, B et C distincts deux à deux et tels que :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}$ [2π] et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{4}$ [2π]

Calculer $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$.

Exercice 8 (N.C)

On considère un cercle C de diamètre [AB] et de centre O.

On désigne par D le point de C tel que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{-160\pi}{9}$ [2π]

1) Déterminer en radians la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

2) Construire les points A, B et D et calculer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

3) Déterminer $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$.

Exercice 9

On considère un cercle C de centre O de diamètre [AB] et M un point de C distinct de A et B.

La demi-droite passant par O, parallèle et de même sens que [AM) coupe C en C.

1) Montrer que (OC) est la médiatrice de [MB].

2) On suppose que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha\ [2\pi]$.

Montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2\alpha\ [2\pi]$.

Exercice 10

Soit un triangle MNP isocèle de sommet principal M tel que :

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \frac{-\pi}{4} + 2k_0\pi$ où $k_0 \in Z$

Calculer $(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM})$.

2) Soit un triangle EFB isocèle de sommet principal E tel que :

$(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB}) = \frac{3\pi}{5} + 2n\pi$ où $n \in Z$

Calculer $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EB})$ et $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{EB})$.

Exercice 11 (N.C)

On considère un triangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$ et le point D tel que $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

1) Calculer $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$.

2) On trace les demi-droites [Bx) et [Cy) parallèles à [AD) et de même sens.

Calculer $(\overrightarrow{Bx}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{Cy}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 12

On considère un parallélogramme ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{2\pi}{7}$ [2π] et on appelle [Ax) la demi-droite opposée à [AB).

1) Calculer $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Ax})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

2) En déduire $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 13 (N.C)

On considère un octogone (polygone régulier à 8 côtés) ABCDEFGH inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 telle que la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ soit positive.

1) Faire un dessin puis évaluer $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ .... $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OA})$.

2) Calculer $(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG})$; $(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{FD})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.

3) Le plan P est muni du repère orthonormé $(o, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$

Déterminer les coordonnées des points B, D, F et H.

Exercice 14 (N.C)

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}$ [2π], on désigne par O le milieu du segment [BC] et α une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

1) Soit E le point vérifiant : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CA}$

Montrer que $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}) \equiv \alpha$ [2π]

2) Calculer alors $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ en fonction de α.

Exercice 15 (N.C)

Soient dans un plan orienté deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O′ et tangents au point I.

Une droite passant par I recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en M et le cercle $\mathcal{C}'$ en M′.

Montrer que les tangentes aux cercles en M et M′ sont parallèles.

Exercice 16

1) Etant donnés deux points distincts A et B, construire l'ensemble E des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2) Déterminer les ensembles F et G tels que :

$M \in F \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 0\ [2\pi]$

$M \in G \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi\ [2\pi]$

Corrigés

Exercice 1

1) a) $-\pi < \frac{17\pi}{16} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in Z \Leftrightarrow -\pi - \frac{17\pi}{16} < 2k\pi \leq \pi - \frac{17\pi}{16}$ et $k \in Z$

$\Leftrightarrow \frac{-33}{16} < 2k < -\frac{1}{16}$ et $k \in Z \Leftrightarrow \frac{-33}{32} < k < \frac{-1}{32}$ et $k \in Z \Leftrightarrow k = -1$

La mesure principale en radians de cet angle orienté est alors $\frac{-15\pi}{16}$

b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{-\pi}{8}$

2) b) $-180 < 2130 + 2k.180 \leq 180$ et $k \in Z \Leftrightarrow -2310 < 2k.180 \leq -1950$ et $k \in Z$

$\Leftrightarrow \frac{-2310}{360} < k \leq -\frac{-1950}{360}$ et $k \in Z \Leftrightarrow k = -6$

La mesure princiaple en degrés de cet angle orienté est $(2130 - 6 \times 360) = -30°$.

a) -150° ; c) 160° d) 15°.

3) c) $100 \in]-200, 200]$ donc la mesure princiaple de cet angle orienté en grades est 100.

a) -150 gr ; b) 190 gr ; d) 0 gr.

Exercice 2

1) $\frac{13\pi}{4} - 4\pi = \frac{-3\pi}{4}$, Or $\frac{-3\pi}{4} \in]-\pi, \pi]$; donc $\frac{-3\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle orienté en radians.

2) $\frac{13\pi}{4} - \left(\frac{15\pi}{4}\right) = 7\pi$, donc $\frac{13\pi}{4}$ n'est pas une mesure de cet angle orienté.

$\frac{13\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = 2\pi$, donc $\frac{5\pi}{4}$ est une mesure de cet angle orienté.

3) Déterminons l'entier relatif k : $-12\pi < \frac{13\pi}{4} + 2k\pi \leq -10\pi$

$\Leftrightarrow \quad -12\pi - \frac{13\pi}{4} < 2k\pi \leq -10\pi - \frac{13\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-61}{4} < 2k \leq \frac{-93}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{-61}{8} < k \leq \frac{-53}{8} \quad \Leftrightarrow \quad k = -7$

Conclusion : $\alpha = \frac{-43\pi}{4}$

Exercice 4

1) $2(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}}) \equiv \alpha\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow$ il existe $k \in Z$ tel que $2(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}}) = \alpha + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in Z$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}}) = \frac{\alpha}{2} + k\pi$

si k est pair : il existe un entier relatif n tel que $k = 2n$ d'où $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}}) = \frac{\alpha}{2} + 2n\pi$

si k est impair : il existe un entier relatif p tel que $k = 2p + 1$

$$(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}}) = \frac{\alpha}{2} + (2p + 1)\pi = (\frac{\alpha}{2} + \pi) + 2p\pi$$

Désignons par $[\ Oz_1\ )$ et $[\ Oz_2\ )$ les demi-droites respectives telles que :

$(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz_1}}) \equiv \frac{\alpha}{2}\ [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz_2}}) \equiv \frac{\alpha}{2} + \pi\ [2\pi]$

Il existe donc deux demi droites $[\ Oz_1)$ et $[Oz_2)$ qui vérifient (*).

2) $(\widehat{\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Ox}}) + (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz_2}}) + 2k\pi$

$$= -(\frac{\alpha}{2} + 2n\pi) + (\frac{\alpha}{2} + \pi + 2p\pi) + 2k\pi$$

$$= \frac{-\alpha}{2} - 2n\pi + \frac{\alpha}{2} + \pi + 2p\pi + 2k\pi$$

$$= \pi + 2(-n + p + k)\pi$$

par suite $(\widehat{\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}}) \equiv \pi\ [2\pi]$

Les demi-droites $[\ Oz_1)$ et $[\ Oz_2)$ sont opposées. Elles sont appelées bissectrices de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}})$.

Exercice 5

1) On a $|\alpha| = \widehat{BAC}$; $|\beta| = \widehat{ACB}$; $|\gamma| = \widehat{CBA}$

Comme $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \pi$

donc $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = \pi$

2) Les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ étant ni nuls ni plats, donc les mesures principales α, β et γ vérifient $-\pi < \alpha < \pi$; $-\pi < \beta < \pi$; $-\pi < \gamma < \pi$.

Donc $-3\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$; or d'après le cours $\alpha + \beta + \gamma = \pi + k2\pi$; $k \in Z$

donc $-3\pi < \pi + k\,2\pi < 3\pi$; donc $-4 < 2k < 2$; donc $-2 < k < 1$

Comme $k \in Z$; donc $k = -1$ ou $k = 0$ par suite $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ou $\alpha + \beta + \gamma = -\pi$

3) Ainsi on a :

$$(I) \begin{cases} |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = \pi \\ \alpha + \beta + \gamma = -\pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad (II) \begin{cases} |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = \pi \\ \alpha + \beta + \gamma = \pi \end{cases}$$

Faisons la somme membres à membres dans (I) et la différence dans (II) on obtient alors :

$$(|\alpha| + \alpha) + (|\beta| + \beta) + (|\gamma| + \gamma) = 0 \quad \text{ou} \quad (|\alpha| - \alpha) + (|\beta| - \beta) + (|\gamma| - \gamma) = 0$$

comme $|\alpha| + \alpha \geq 0$ $|\beta| + \beta \geq 0$ $|\gamma| + \gamma \geq 0$

$|\alpha| - \alpha \geq 0$ $|\beta| - \beta \geq 0$ $|\gamma| - \gamma \geq 0$

donc $\begin{cases} |\alpha| + \alpha = 0 \\ |\beta| + \beta = 0 \\ |\gamma| + \gamma = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} |\alpha| - \alpha = 0 \\ |\beta| - \beta = 0 \\ |\gamma| - \gamma = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} |\alpha| = -\alpha \\ |\beta| = -\beta \\ |\gamma| = -\gamma \end{cases}$ ou $\begin{cases} |\alpha| = \alpha \\ |\beta| = \beta \\ |\gamma| = \gamma \end{cases}$

d'où α, β et γ sont tous positifs ou bien α, β et γ sont tous négatifs.

Exercice 6

1) a) Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{13\pi}{3}\ [2\pi]$ or $\frac{13\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$

donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Comme $\frac{\pi}{3} \in]-\pi, \pi]$ donc $\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale en radians de cet angle

D'où 60° est la mesure principale en degrés, par suite $\widehat{AOB} = |60°| = 60°$

b) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{-19\pi}{6} + 2k\pi = 4\pi - \frac{19\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$; $n \in Z$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est $\frac{5\pi}{6}$

Déterminons l'entier relatif k tel que :

$$-\pi < \frac{97\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad -\pi - \frac{97\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{-97\pi}{6} + \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-103}{6} < 2k \leq \frac{-91}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-103}{12} < k \leq \frac{-91}{12} \quad \Leftrightarrow \quad k = -8$$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ est alors $\frac{\pi}{6}$

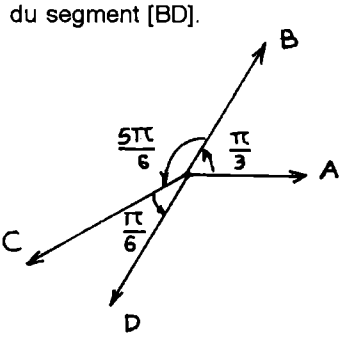
2) b) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{-19\pi}{6} + \frac{97\pi}{6} + 2k\pi$ où $n \in Z$

$$= \frac{78\pi}{6} + 2k\pi = 13\pi + 2k\pi$$

Donc (OB, OD) est un angle plat, par suite les demi-droites [OB] et [OD] sont opposées.

or $\begin{cases} OB = 4 \\ OD = 4 \end{cases}$ donc $OB = OD$

Conclusion : O est le milieu du segment [BD].



Exercice 7

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2k_1\pi$ $\quad k_1 \in Z$

$= \pi + 2k'\pi + \frac{\pi}{3} 2k''\pi + 2k_1\pi$ $\quad k_1$, k' et k'' entiers relatifs

$= \frac{4\pi}{3} + 2\ (k' + k'' + k_1)\ \pi$

Ainsi $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \frac{4\pi}{3} + n2\pi$ $\quad n \in Z$

Dans le triangle ABC nous avons :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) . = \pi + 2k\pi$ $\quad k \in Z$

par suite $\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi = \pi + 2k\pi$; k_1, k_2 et k entiers relatifs

D'où $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{5\pi}{12} + n2\pi$; $n \in Z$

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}) + 2k\pi$; $k \in Z$

D'où $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in Z$

En utilisant le fait que toute homothétie conserve la mesure des angles orientés de deux demi-droites :

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = (-\overrightarrow{BA}, -\overrightarrow{CA}) + 2k\pi$ où $k \in Z$

$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Exercice 9

1) M appartient au cercle de diamètre [AB] donc $\widehat{AMB} = 90°$

Or (DC) et (AD) sont parallèles ; donc (OC) et (MB) sont perpendiculaires.

D'autre part OM = OB par suite (OC) est la médiatrice du segment [MB].

2) Le triangle OMB est isocèle de sommet principal O et (OC) est la médiatrice de [MB] donc (OC) est la bissectrice du secteur [OM, OB], d'où $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2\ (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})\ [2\pi]$.

D'autre part l'image de l'angle orienté $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ par le translation $t_{\overrightarrow{AO}}$ est l'angle orienté $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ d'où $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha\ [2\pi]$, d'où $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2\alpha\ [2\pi]$.

Exercice 10

1) Le triangle MNP est isocèle de sommet principal M

donc $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) + 2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \pi + 2k_1\pi$; $k_1 \in Z$

d'où $\frac{-\pi}{4} + 2k_2\pi + 2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \pi + 2k_1\pi$; $(k_1, k_2) \in Z^2$

par suite $2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \frac{5\pi}{4} + 2k_1\pi - 2k_2\pi$

d'où $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \frac{5\pi}{8} + (k_1 - k_2)\pi$

En posant $k = k_1 - k_2$ $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \frac{5\pi}{8} + k\pi$

Donc $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \frac{5\pi}{8} + 2k\pi$ ou $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \frac{-3\pi}{8} + 2k\pi$ $k \in Z$

Or les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ et $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN})$ sont de même signe, donc négatives et par suite $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \frac{-3\pi}{8} + 2k\pi$ $k \in Z$

2) Le triangle EFB est isocèle de sommet principal E

d'où $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) + 2(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB}) = \pi + 2k\pi$; $k \in Z$

par suite $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) + 2\left(\frac{3\pi}{5} + 2n\pi\right) = \pi + 2k\pi$; $k \in Z$ et $n \in Z$

D'où $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) = \frac{-\pi}{5} + 2k'\pi$; $k' \in Z$

$(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{EF}) + (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EB}) + 2n\pi$; $n \in Z$

$= \pi + 2k_1\pi + \frac{\pi}{5} + 2k\pi + 2n\pi$; $k_1 k \in Z$

D'où $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{EB}) = \frac{6\pi}{5} + 2k_2\pi$; $k_2 \in Z$

Exercice 12

1) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Ax}) \equiv \pi\ [2\pi]$

par suite $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Ax}) + \frac{2\pi}{7} \equiv \pi\ [2\pi]$

d'où $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Ax}) \equiv \frac{5\pi}{7}\ [2\pi]$

L'image de l'angle orienté $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Ax})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et par suite $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Ax}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\ [2\pi]$.

D'où $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{5\pi}{7}\ [2\pi]$

2) Soit S la symétrie centrale de centre I milieu de [AD].

L'image de l'angle orienté $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Ax})$ par S est l'angle orienté $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$,

par suite $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Ax}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})\ [2\pi]$.

donc $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \equiv \frac{5\pi}{7}\ [2\pi]$

D'une façon analogue, on pourra montrer que $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\ [2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{2\pi}{7}\ [2\pi]$.

Exercice 16

1) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $A\widehat{M}B = \frac{\pi}{2}$ par suite M appartient au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

Seuls les points du demi cercle C_1 privé des points A et B vérifient $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Conclusion : E = C_1 \ { A, B }

2) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 0\ [2\pi]$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires et de même sens.

Conlusion : F = (AB) \ [AB]

3) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi\ [2\pi]$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires et de sens contraire c'est à dire $M \in [AB] \setminus \{ A, B \}$

Conclusion : G = [AB] \ { A, B }

FORMULES TRIGONOMETRIQUES

Exercices

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A, B, C, D et E du cercle trigonométrique C tels que :

$\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OA})} \equiv \frac{-2\pi}{3}\ [2\pi]$; $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OB})} \equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$

$\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OC})} \equiv \frac{-5\pi}{4}\ [2\pi]$; $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OD})} \equiv \frac{1993\pi}{2}\ [2\pi]$ et $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OE})} \equiv \frac{193\pi}{6}\ [2\pi]$

Déterminer les coordonnées de ces points dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un point M (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = 1 + \cos 2t \end{cases} \qquad t \in IR$$

Ecrire y en fonction de x. Déduire et construire l'ensemble des points M quand t varie dans IR.

Exercice 3 (N.C)

1) Soit un réel x tel que $\cos x = \frac{-1}{3}$ et $-\pi < x < 0$

Déterminer sin x, tg x et cotg x

2) Soit un réel y tel que $\text{tgy} = \frac{1}{2}$ et $0 < y < \frac{\pi}{2}$

Déterminer siny et cosy.

3) Soit un réel z tel que $\sin z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\frac{\pi}{2} < z < \pi$

Déterminer cos 2z et en déduire z.

4) Soit un réel u tel que $\text{tg} \frac{u}{2} = \sqrt{2} - 1$ et $0 < u < \frac{\pi}{2}$

Calculer sin u ; cos u et en déduire u.

Exercice 4 (N.C)

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{5\pi}{16} + \cos^2 \frac{7\pi}{16} + \cos^2 \frac{9\pi}{16} + \cos^2 \frac{11\pi}{16} + \cos^2 \frac{13\pi}{16} + \cos^2 \frac{15\pi}{16}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{16} + \sin^2 \frac{3\pi}{16} + \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \sin^2 \frac{7\pi}{16} + \sin^2 \frac{9\pi}{16} + \sin^2 \frac{11\pi}{16} + \sin^2 \frac{13\pi}{16} + \sin^2 \frac{15\pi}{16}$$

$$C = \sin \frac{37\pi}{72} \sin \frac{11\pi}{72} - \cos \frac{20\pi}{36} \cos \frac{7\pi}{36}$$

$$D = \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{3\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9}$$

Exercice 5 (N.C)

Soit x un réel qui n'est de la forme $(2k + 1)\pi$ où $k \in Z$

1) Montrer que $\text{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

2) En déduire alors $\text{tg} \frac{\pi}{8}$ et $\text{tg} \frac{\pi}{12}$

3) a) Ecrire $\frac{\pi}{24}$ en fonction de $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{12}$

b) Calculer alors $\text{tg} \frac{\pi}{24}$

Exercice 6

1) a) Ecrire $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$

b) En déduire alors $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$ et $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12}$

2) a) Montrer que si cos2x et cos x sont non nuls ; alors $1 + \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}2x = \frac{1}{\cos 2x}$

b) Déduire alors $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\operatorname{tg}\frac{111\pi}{8}$

Exercice 7 (N.C)

1) Montrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

$\sin^4 x = \cos^4 x - \cos 2x$

2) Calculer alors : $A = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$

$B = \sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8}$

Exercice 8 (N.C)

1) En utilisant l'égalité $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

Calculer sans utiliser une calculatrice.

$\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ et $\cos \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$

2) En déduire alors : $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$

$\cos\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$

$\cos\frac{13\pi}{12}$, $\sin\frac{13\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12}$

$\cos\frac{\pi}{24}$, $\sin\frac{\pi}{24}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$

Exercice 9 (N.C)

Vérifier les égalités suivantes (en supposant que les expressions sont définies) :

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{2}$$

$$\cos x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = 0$$

$$\sin(x + y)\sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 y - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2}$$

$$1 + \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cos x}$$

$$1 + \sin x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$1 - \sin 2x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$$

Exercice 10 (N.C)

On considère deux réels a et b tel que : $0 < a < \frac{\pi}{2} < b < \pi$ et $\sin a = \sin b = \frac{1}{4}$

Calculer cos a, cos b, tg a, tg b, sin 2a, cos 2a, tg 2a, sin 2b, cos 2b, tg 2b, $\cos\frac{a}{2}$,

$\sin\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{b}{2}$, $\sin\frac{b}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$

Exercice 11 (N.C)

Exprimer en fonction de cos 2x les réels suivants :

$A = \cos^4 x - \sin^4 x$

$B = \cos^4 + \sin^4 x - \frac{1}{2} \sin^2 2x$

$C = \cotg^2 x - \tg^2 x$; $D = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$

$E = -8 \sin^6 x - 6\sin^2 x + 12 \sin^4 x$

$F = \frac{1 + \tg^2 x}{1 - \tg^2 x}$ avec cos x et cos 2x sont non nuls

Exercice 12

Exprimer en fonction de $t = \tg \frac{x}{2}$, les expressions suivantes : (en supposant qu'elles existent)

$A = \frac{\sin x + \cos x - 1}{3 \cos x - \sin x + 2}$ $B = \tg x + \cotg x$

$C = \frac{1 - \cos x - \sin x}{1 + \cos x + \sin x}$ $D = \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}$

$E = \frac{\sin x + \cos x}{3\sin x - 2\cos x}$

Exercice 13

Simplifier les expressions suivantes (en supposant qu'elles existent) :

$A = \frac{\sin 3x}{\cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x}$ $B = \frac{\cotg x + \cotg 4x}{1 - \cotg x \,.\, \cotg 4x}$

$C = \frac{-\sin x + 2\cos x - 2}{2\sin x + \cos x + 1}$ $D = \sin (x + y) \cos y - \cos (x + y) \sin y$

$E = \sin x \sin (y - z) + \sin y \sin (z - x) + \sin z \sin (x - y)$

$F = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}$ $G = \frac{\tg^2 x}{\cotg^2 y} - \frac{\sin^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \,.\, \cos^2 y}$

$H = \frac{2\tg x}{1 + \tg^2 x}$ $K = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} - \tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$

Exercice 14

Ecrire sous la forme d'un produit

$A = \sin x + \sin 2x$ $B = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

$C = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ $D = \cos x + \cos 2x$

$E = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ $F = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

$G = 1 - \cos 2x + 2\sin x$ $H = 1 + \cos 2x - 2\cos^3 x$

$I = 1 - 2\cos x$ $J = \sin x + \cos x - \sqrt{2} \sin 2x$

$K = \text{tg } x + \text{tg } 2x$ $L = \sin^2 3x - \sin^2 x$ $M = \cos^2 3x - \cos^2 2x$

Exercice 15

Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a \cos (bx - \gamma)$:

$A = \cos x - \sin x$ $B = -2 \cos x - 2 \sin x$

$C = \cos 3x + \sin 3x$ $D = -5\sqrt{3} \sin 2x - 5 \cos 2x$

$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin 7x - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 7x$ $G = \cos x + \cos (x - \frac{2\pi}{3})$

$H = \frac{-1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x$

Exercice 16

Soient a, b et c trois réels.

1) a) Transformer en produit l'expression $S = \sin a + \sin b + \sin c - \sin (a + b + c)$

b) En déduire alors l'expression de sin 3a en fonction de sin a

2) Soit ABC un triangle non rectangle et on pose $\widehat{CAB} = a$; $\widehat{ABC} = b$ et $\widehat{ACB} = c$

a) Que devient alors S ?

b) Montrer que : $\text{tg } a + \text{tg } b + \text{tg } c = \text{tg } a \,.\, \text{tg } b \,.\, \text{tg } c$

$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 1 - 4 \sin a \sin b \sin c$

$$\frac{\sin b + \sin c}{\cos b + \cos c} = \cot g \frac{a}{2}$$

$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 - 2 \cos a \cos b \cos c$

Exercice 17

On considère les réels :

$A = \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$; $B = \sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$

1) Calculer A.B et en déduire A

2) Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1}{2}$ et en déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$

3) Calculer alors $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$

Exercice 18

Soient deux réels x et y tel que $\cos x \neq 0$ et $\cos y \neq 0$

1) Ecrire sous la forme d'un quotient : $A = tg\,x + tg\,y$ et $B = tg\,x - tg\,y$

2) Montrer que $tg^2 a - tg^2 y = \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2\cos^2 x \,.\, \cos^2 y}$

Exercice 19

On considère les réels A_n et B_n tels que

$A_n = \cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1} \ldots \cos\frac{n\pi}{2n+1}$ $(n \in IN^*)$

$B_n = \sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1} \ldots \sin\frac{n\pi}{2n+1}$ $(n \in IN^*)$

1) En utilisant le produit $A_n B_n$ montrer que $A_n = \frac{1}{2^n}$

2) Transformer en produit l'expression $E = 1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

et calculer la somme $S = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

3) a) Calculer $S' = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$

b) Essayer de généraliser ce résultat.

Exercice 20 (N.C)

1) a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A, B, C, D et E du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et une mesure de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$ étant $\frac{2\pi}{5}$

b) Que peut-on dire des points A, B, C, D et E ?

Que peut-on dire de la somme vectorielle $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$?

2) On considère la somme $S = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$

Montrer que $S = 0$

3) Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2$ et $\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} = -2\cos\frac{\pi}{5}$

En déduire alors la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$

4) Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{8\pi}{5}$ sont solutions de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$

5) a) Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont les abscisses des points communs au cercle $\mathcal{C}_1$ centre $\Omega\left(\frac{-1}{4}, 0\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et de l'axe des abscisses.

b) Déduire une construction d'un pentagone régulier.

Exercice 21

On pose $\cos x + \sin x = a$

1) Ecrire $\cos x \sin x$ puis $\cos^3 x + \sin^3 x$; $\cos^4 x + \sin^4 x$ en fonction de a

2) Pout tout entier non nul n on pose $S_n = \cos^n x + \sin^n x$

Pour $n > 2$, écrire S_n en fonction de S_{n-1}, S_{n-2} et a (on pourra faire le produit $a.S_{n-1}$).

3) Retrouver alors l'expression de $\cos^3 x + \sin^3 x$, $\cos^4 x + \sin^4 x$ en fonction de a.

Exercice 22

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$; $U_1 = \cos \theta$

Pour tout entier n ; $U_{n+2} = 2U_{n+1} \cos \theta - U_n$

1) Calculer U_2 , U_3 et U_4.

Comparer U_2 , U_3 et U_4 à $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$ et $\cos 4\theta$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \cos n\theta$

Corrigés

Exercice 1

$(\vec{i}, \widehat{\vec{OA}}) \equiv \frac{-2\pi}{3}$ [2π] donc $A\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) ; \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$

$\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

$\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

D'où $A\left(\frac{-1}{2} , \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$(\vec{i}, \widehat{\vec{OB}}) \equiv \frac{7\pi}{6}$ [2π] donc $B\left(\cos\frac{7\pi}{6} ; \sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = \frac{-1}{2}$

D'où $B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} , \frac{-1}{2}\right)$

$(\vec{i}, \widehat{\vec{OC}}) \equiv \frac{-5\pi}{4}$ [2π] donc $C\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) ; \sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\right)$

$\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{-5\pi}{4} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $C\left(\frac{-\sqrt{2}}{4} , \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$(\vec{i}, \widehat{\vec{OD}}) \equiv \frac{1993\,\pi}{2}$ [2π] donc $D\left(\cos\left(\frac{1993\,\pi}{2}\right) ; \sin\left(\frac{1993\,\pi}{2}\right)\right)$

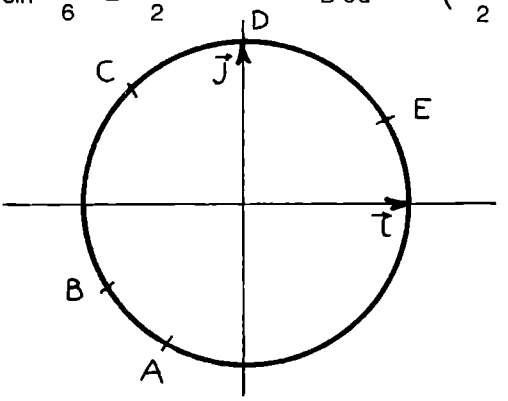
$\cos\left(1993\,\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(996\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\sin\frac{1993\pi}{2} = \sin\left(996\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ D'où D(0, 1)

$(\vec{i}, \widehat{\vec{OE}}) \equiv \frac{193\,\pi}{6}$ [2π] donc $E\left(\cos\left(\frac{193\,\pi}{6}\right) ; \sin\left(\frac{193\,\pi}{6}\right)\right)$

$\cos\left(\frac{193\,\pi}{6}\right) = \cos\left(32\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{193\,\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ D'où $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Exercice 2

Le point M (x, y) vérifie : $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = 1 + \cos 2t \end{cases}$ où t décrit IR

Déterminons une relation entre x et y.

$y = 1 + \cos 2t = 2\cos^2 t = 2\,(1 - \sin^2 t) = 2(1 - x)$ par suite $y = 2(1 - x)$

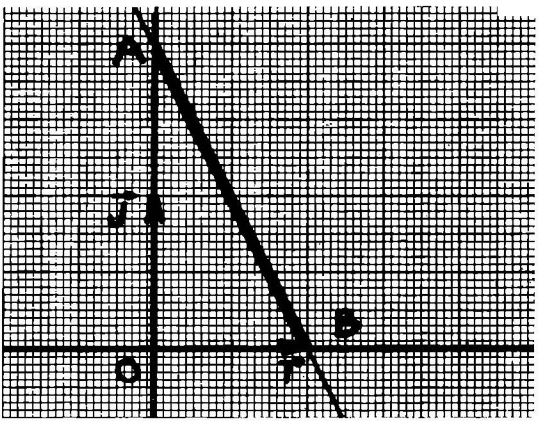
Comme $-1 \leq \sin t \leq 1$ d'où $0 \leq \sin^2 t \leq 1$.

L'ensemble des points M est le segment de droite défini par : $\begin{cases} y = 2\,(1 - x) \\ x \in [0, 1] \end{cases}$

Posons A (0, 2) (si x = 0 alors y = 2 (1 - 0) = 2)

et B (1, 0) (si x = 1 alors y = 0)

L'ensemble des points M est le segment [AB].



Exercice 6

1) a) $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \text{tg}\left(2.\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\,\text{tg}\,\frac{\pi}{12}}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$ (*)

en posant $t = \text{tg}\,\frac{\pi}{12}$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2t}{1 - t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t^2 = 2\sqrt{3}\,t \\ t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{cases}$$

$t^2 + 2\sqrt{3}\,t - 1 = 0$

$\Delta' = (\sqrt{3})^2 - (-1) = 2^2$

$t_1 = -\sqrt{3} + 2 \qquad t_2 = -\sqrt{3} - 2$

$(*) \Leftrightarrow \text{tg}\,\frac{\pi}{12} = -\sqrt{3} + 2$ ou $\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = -\sqrt{3} - 2$

or $\text{tg}\,\frac{\pi}{12} > 0$; alors $\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{12} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\text{tg}\,\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = -(2+\sqrt{3}) = -2-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$$

2) a) Si $\cos x \neq 0$ et $\cos 2x \neq 0$,

$$1+\operatorname{tg}x \,.\, \operatorname{tg}2x = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x \,.\, \cos 2x + \sin x \,.\, \sin 2x}{\cos x \,.\, \cos 2x}$$

$$= \frac{\cos(x-2x)}{\cos x \,.\, \cos 2x} = \frac{\cos(-x)}{\cos x \,.\, \cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x}$$

b) $1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$

donc $1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ et par suite $1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}$

D'où $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{-5\pi}{8}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -\left(\frac{-1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

donc $\operatorname{tg}\left(\frac{-5\pi}{8}\right) = \sqrt{2}+1$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{111\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(13\pi + \frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\frac{7\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = -(\sqrt{2}-1)$$

d'où $\operatorname{tg}\left(\frac{111\pi}{8}\right) = 1-\sqrt{2}$

Exercice 12

$$B = \operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \,.\, \sin x} = \frac{1}{\cos x \,.\, \sin x}$$

$$= \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\ \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{(1+t^2)^2}{2t(1-t^2)}$$

$$C = \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2-1+t^2-2t}{1+t^2+1-t^2+2t} = \frac{2t^2-2t}{2t+2} = \frac{t^2-t}{t+1}$$

$$D = \frac{2 + \frac{2t}{1+t^2}}{2 - \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{2+2t^2+2t}{2+2t^2-2t} = \frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$$

Exercice 13

$$A = \frac{\sin 3x \,.\, \sin x - \cos 3x \,.\, \cos x}{\cos x \,.\, \sin x} = \frac{-\cos 4x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = -2\,\frac{\cos 4x}{\sin 2x}$$

$$B = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)} = \operatorname{tg}\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)\right] = \operatorname{tg}(\pi - 5x) = -\operatorname{tg} 5x$$

En posant $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\quad C = \frac{-4t^2-2t}{4t+2}$ et si $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ et $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \neq \frac{-1}{2}$

$$C = \frac{(4t+2)(-t)}{4t+2} = -t \qquad \text{d'où} \qquad C = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$D = (\sin x \cos y + \sin y \cos x)\cos y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y)\sin y$

$= \sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y = \sin((x+y) - y) = \sin x$

$E = 0$

$$F = \frac{-(3\sin x - 4\sin^3 x) + 3\sin x}{4} = \frac{4\sin^3 x}{4} = \sin^3 x$$

$G = \operatorname{tg}^2 x.\operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg}^2 x\,(1 + \operatorname{tg}^2 y) + 1 + \operatorname{tg}^2 x$ (nous avons utilisé l'identité $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$)

$= \operatorname{tg}^2 x \,.\, \operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x \,.\, \operatorname{tg}^2 y + 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1$

$$H = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin x}{\sin \frac{\pi}{2} + \sin x} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cot g\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

par suite $K = 0$

Exercice 14

$$A = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$B = (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x\,(2\cos x + 1)$$

$$C = (\sin x + \sin 4x)(\sin 2x + \sin 3x) = 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 4\sin\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$$

De même nous avons :

$$D = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} \qquad E = \cos 2x\,(2\cos x + 1)$$

$$F = 4\cos\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$$

$$G = 1 - (1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x = 2\sin x\,(\sin x + 1)$$

$$H = (1 + \cos 2x) - 2\cos^3 x = 2\cos^2 x - 2\cos^3 x = 2\cos^2 x\,(1 - \cos x)$$

$$I = 1 - 2\left[1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right] = 4\sin^2\frac{x}{2} - 1 = \left(2\sin\frac{x}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{x}{2} + 1\right)$$

$$J = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right] - \sqrt{2}\sin 2x$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right] - \sqrt{2}\sin 2x = \sqrt{2}\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2x\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$$

$$K = \operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x \left[\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x + 2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right] = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} (3 - \operatorname{tg}^2 x)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} x)$$

$$L = (\sin 3x + \sin x)(\sin 3x - \sin x) = \sin 4x \,.\, \sin 2x$$

$$M = (\cos 3x - \cos 2x)(\cos 3x + \cos 2x) = -\sin 5x \sin x$$

Exercice 17

1) $A.B = \cos\frac{2\pi}{5} \cos\frac{4\pi}{5} \sin\frac{2\pi}{5} \sin\frac{4\pi}{5} = (\cos\frac{2\pi}{5} \sin\frac{2\pi}{5})(\cos\frac{4\pi}{5} \sin\frac{4\pi}{5})$

$$= (\frac{1}{2} \sin\frac{4\pi}{5})(\frac{1}{2} \sin\frac{8\pi}{5}) = \frac{1}{4} \sin\frac{4\pi}{5} \sin\frac{8\pi}{5}$$

Or $\sin\frac{8\pi}{5} = \sin(2\pi - \frac{2\pi}{5}) = \sin(\frac{-2\pi}{5}) = -\sin\frac{2\pi}{5}$

Ainsi $A.B = \frac{-1}{4} \sin\frac{2\pi}{5} \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{-1}{4} B$

Comme $B \neq 0$ donc $A = \frac{-1}{4}$

2) $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos\frac{3\pi}{5} \cos\frac{\pi}{5}$

Or $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = -\cos\frac{\pi}{5}$

$\cos\frac{3\pi}{5} = \cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) = -\cos\frac{2\pi}{5}$

D'où $2\cos\frac{3\pi}{5} \cos\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} \cos\frac{4\pi}{5} = 2 \,.\, A = \frac{-1}{2}$

par suite $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1}{2}$

Nous avons ainsi : $\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1}{2} \\ \cos\frac{2\pi}{5} \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1}{4} \end{cases}$

$\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont alors les solutions de l'équation : $x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} = 0$

Les solutions de cette équation sont :

$x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; $x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Comme $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$ donc $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

3) $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$ par suite $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$

d'où $\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+3}{8} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{2}}}$ car $\cos\frac{\pi}{5} > 0$

D'autre part, $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

d'où $\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et comme $\frac{5-\sqrt{5}}{8} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{5} > 0$

alors $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Exercice 18

$$A = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$B = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-y) = \frac{\sin(x-y)]}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$2)\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} \cdot \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\cos[(x+y)-(x-y)] - \cos[(x+y)+(x-y)]\right)}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$$

EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercices

Exercice 1 (N.C)

Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

2) $-\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

3) $\cos x \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{4}$

4) $\operatorname{tg}(-x) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

5) $\cos x = \sin 3x$

6) $\cos 5x = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

7) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1$

8) $-\cos 2x + \sin 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

9) $2\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 1 = 0$

10) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

11) $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

12) $\cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{2} = 0$

13) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

14) $\cos 3x = 4\cos^2 x$

15) $\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 4x = 1$

16) $-\cos^2 x + \sin^2 x = \sin 5x$

17) $tg^2 (x - \frac{\pi}{6}) - tg^2 (x + \frac{\pi}{3}) = 0$

18) $\sin 5x \left[\sin (-7x + \frac{\pi}{2}) + 5 \right] = 0$

19) $\sin^2 x = 1 + tg^2 x$

20) $\frac{tg\ 5x + tg\ 2x}{1 - tg\ 5x \,.\, tg\ 2x} = \frac{2tg\ x}{1 - tg^2 x}$

21) $\sin x + \sin 2x + \sin 5x + \sin 6x = 0$

22) $2 \sin x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

23) $3\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

24) $\cot g^3 x = 2\cos 3x$

25) $\sin^4 x + \sin^2 x - 6 = 0$

26) $tg^2 (x - \frac{3\pi}{6}) = 3$

27) $\sin x + \sin (\frac{\pi}{3} - x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

28) Résoudre dans $[O, 2\pi]$ $\frac{\sin 4x}{\sin x} - \frac{\cos 4x}{\cos x} = 2$

29) $3\sin^2 x + 4\cos^2 x + 3\sin x = 0$

30) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = 3$

31) $\frac{3 + 2\cos x}{1 + \cos x} = 1$

32) $\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} = -1$

33) $\sin 2x + \sin 5x = \cos \frac{3x}{2}$

34) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

36) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos 2x} = -1$

37) $\cos 2x = \cos^2 x$

38) $2\cos^2 x = \cot g\ x$

39) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cos (x - \frac{\pi}{8})$

40) $\begin{cases} 2\cos x + \sqrt{3} = 0 \\ 2\sin x = -1 \end{cases}$

Exercice 2

1) Résoudre dans IR l'équation suivante : $\cos 4x = \sin x$

2) Soit un réel x vérifiant : $\sin x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4}$ et $\frac{-\pi}{2} < x < 0$

a) Calculer $\cos 2x$ et $\cos 4x$

b) En déduire alors x

3) Calcuer $tg\ \frac{3\pi}{10}$

Exercice 3 (N.C)

Soit à résoudre dans [O, 2π] l'équation (E) : $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \text{tg}(-x)$

1) a) Sur quel ensemble (E) est-elle définie ?

b) Montrer alors que l'équation (E) est équivalente à :

$$\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + \text{tg}(\pi + x) = 0$$

2) a) Montrer que si a , b et c appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}$

et $a + b + c = \pi + 2n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$

alors : $\text{tg}\, a + \text{tg}\, b + \text{tg}\, c = \text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b \,.\, \text{tg}\, c$

b) En déduire alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 4

Soit un réel x vérifiant : $\text{tg}\, x = 1 - \sqrt{2}$ et $\frac{-\pi}{2} < x < 0$

1) Déterminer tg 2x et en déduire x.

2) Déterminer les réels t vérifiant : $\text{cotg}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{2}$

3) Déterminer les réels y vérifiant : $\frac{\sqrt{3} - \text{tg}\, y}{1 + \sqrt{3}\,\text{tg}\, y} = 1 + \sqrt{2}$

4) Déterminer les réels z de [-π , π] vérifiant :

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Exercice 5 (N.C)

1) a) Montrer que $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}}$

et $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}}$

b) En déduire que : $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \text{tg}\ \frac{7\pi}{24}$ et $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \text{tg}\ \frac{13\pi}{24}$

2) Déterminer l'ensemble S des solutions dans IR de l'équation :

(E) $(3-\sqrt{6})\,\text{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\,\text{tg}\,x - 3 - \sqrt{6} = 0$

3) a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à :

(E') $-2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 4\sin^2 x = 1 + \sqrt{6}$

b) En déduire alors l'ensemble S par cette deuxième méthode.

Exercice 6 (N.C)

On se propose de résoudre dans IR l'équation :

(E) : $2\sin 2x - (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\cos x - \sin x) = 2 + \sqrt{3}$

1) On pose $X = x - \frac{\pi}{4}$

a) Montrer que cette équation est équivalente à : $-4\sin^2 X + 2(\sqrt{3}+1)\sin X - \sqrt{3} = 0$

b) En déduire alors les solutions de cette équation dans IR.

2) a) En prenant comme inconnues : $u = \cos x - \sin x$ et $v = \cos x \sin x$

Montrer que : $\begin{cases} u^2 = 1 - 2v \\ 4v - (\sqrt{6}+\sqrt{2})u = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$

b) Déduire alors u (on pourra vérifier que $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$)

3) Déterminer les solutions dans IR puis dans $[0, 2\pi]$ de l'équation (E).

Exercice 7 (N.C)

1) Déterminer les réels x de $[-\pi, \pi]$ $\quad 2\cos x - 1 > 0$

2) Déterminer les réels x de $[0, \pi]$ $\quad \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Déterminer les réels x de $[0, 2\pi]$ $\quad 4\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$

4) Déterminer les réels x de $[0, \frac{\pi}{2}[$ $\quad 5\cos^2 x + 10\cos x > 0$

5) Déterminer les réels x de $[-\pi, \pi]$ $\quad (\sqrt{2}\sin x - 1)(\sqrt{2}\cos + 1) \geq 0$

6) Déterminer les réels x de $[0, \frac{\pi}{3}]$ $\quad \frac{2\cos x - \sqrt{3}}{2\sin x + 1} \leq 0$

7) Déterminer les réels x de $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\quad \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 1 > 0$

8) Déterminer les réels x de $]0, \pi[$ $\quad \cot g\, x > \sin 2x$

9) Déterminer les réels x de $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ $\quad \frac{\sin^2 x - 3\sin x}{3\cos x - 6} \geq 0$

10) Déterminer les réels x de $]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ $\quad \frac{2\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x} < \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

11) Déterminer les réels x de $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ $\quad \frac{\sin x \cos x}{2\cos^2 x - 1} < \frac{-1}{2}$

12) Déterminer les réels x de $[0, 2\pi]$ $\quad \sin^3 x < \cos^3 x$

13) Déterminer les réels x de $]-\pi, 0[$ $\quad \cot g^2 x - (2 + \sqrt{3})\cot g\, x < 2\sqrt{3}$

14) Déterminer les réels x tels que $\quad \sin 4x + 4\sin^3 x \cos x \geq 0$

15) Déterminer les réels x tels que $\quad \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} > 0$

Exercice 8 (N.C)

1) Déterminer le signe des expressions suivantes pour x élément de l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

$A(x) = 2\cos x + 1$ $\qquad$ $B(x) = -\sqrt{3}\sin x - 4$

$C(x) = \mathrm{tg}^2 x - 3$ $\qquad$ $D(x) = \frac{4}{3}\sin^2 x - 1$

$E(x) = -\cos x + 1$

$F(x) = \cos^2 x + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$G(x) = 3\cos(x - \frac{\pi}{3}) + 3\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3})$

$H(x) = \cos^2 x - 3\cos x$

2) Déterminer le signe des expressions suivantes pour x élément de [0 , 2π].

$$R(x) = \frac{2\sin x + \sqrt{3}}{\cos x + 2} \qquad T(x) = \frac{\cos 2x + 1}{1 + \sin 2x}$$

$$U(x) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \sin 2x} \qquad V(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

Exercice 9

1) Ecrire $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$ sous la forme d'une somme de sinus et cosinus.

2) Montrer alors que : $(\cos x \,.\, \sin x)^3 = \frac{3}{32} \sin 2x - \frac{1}{32} \sin 6x$

3) Retrouver ce dernier résultat en remarquant que $\cos x \,.\, \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$

4) En déduire alors le signe de $A(x) = 3 \sin 2x - \sin 6x$, sur $\left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right]$

Exercice 10

On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer les réels x de [0 , 2π] tels que $f(x) = -\sqrt{3}$

3) Déterminer les réels x de [0 , 2π] tels que $f(x) \leq -1$

Exercice 11

Soit à résoudre dans IR l'équation : $-2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 4\sin^2 x = 1 + \sqrt{6}$

1) a) Montrer que cette équation est équivalente à : $-3\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{6}$

b) En déduire alors l'ensemble de ses solutions.

2) Déterminer les réels x tel que : $-2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 4\sin^2 x < 1 + \sqrt{6}$

Corrigés

Exercice 2

$\cos 4x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = \frac{-\pi}{2} + x + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \qquad k \in Z$$

D'où $S = \left\{\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} \; ; \; \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in Z\right\}$

2) a) $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ et $\sin x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{-\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$

D'où $\cos 4x = \sin x$ par suite $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ ou $x = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ $k \in Z$

D'où $\frac{-\pi}{2} < \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} < 0$ et $k \in Z$

$\Leftrightarrow \quad \frac{-3}{2} < k < \frac{-1}{4}$ et $k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$

$\frac{-\pi}{2} < \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < 0$ et $k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2} < k < \frac{1}{4}$ et $k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$

Ainsi $x = \frac{-3\pi}{10}$ ou $x = \frac{-\pi}{6}$

3) $\text{tg}\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = \frac{\sin\left(\frac{-3\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{-3\pi}{10}\right)} = \frac{\frac{-\sqrt{5}-1}{4}}{\cos\left(\frac{-3\pi}{10}\right)}$

$\cos^2\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

or $\cos\left(\frac{-3\pi}{10}\right) > 0$ donc $\cos\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}$

Par suite $\text{tg}\frac{3\pi}{10} = -\text{tg}\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

Exercice 4

1) $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ $\qquad \text{tg}\, x = 1 - \sqrt{2}$

$\text{tg}\, 2x = \frac{2\text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2 + 2\sqrt{2}} = -1$

Or $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ donc $-\pi < 2x < 0$,

comme $\text{tg}\, 2x = -1$ donc $2x = \frac{-\pi}{4}$

Conclusion : $x = \frac{-\pi}{8}$

2) $\text{cotg}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \text{tg}\left[\frac{\pi}{2} - \left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \text{tg}\left(\frac{-\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - t\right) = \text{tg}\left(\frac{-\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{6} - t = \frac{-\pi}{8} + n\pi \\ \left(\frac{5\pi}{6} - t\right) \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \end{cases} \quad (n, k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{23\pi}{24} + n\pi \\ t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{23\pi}{24} + n\pi$

L'ensemble des solutions dans IR de l'équation $\cot g\left(t - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{2}$ est :

$S = \left\{ \frac{23\pi}{24} + n\pi \ , \ n \in Z \right\}$

3) $\frac{\sqrt{3} - tg\ y}{1 + \sqrt{3}\ tg\ y} = -1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{tg\frac{\pi}{3} - tg\ y}{1 + tg\frac{\pi}{3}\ tg\ y} = -tg\left(\frac{-\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \quad tg\left(\frac{\pi}{3} - y\right) = tg\frac{\pi}{8}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - y = \frac{\pi}{8} + n\pi \ ; \ n \in Z \\ \left(\frac{\pi}{3} - y\right) \in IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in Z \right\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5\pi}{8} + n\pi \ ; \ n \in Z \\ y \in IR \setminus \left\{ \frac{-\pi}{6} + k\pi \ ; \ k \in Z \right\} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions dans IR de l'équation : $\frac{\sqrt{3} - tg\ y}{1 + \sqrt{3}\ tg\ y} = -1 + \sqrt{2}$ est :

$S' = \left\{ \frac{5\pi}{8} + n\pi \ , \ n \in Z \right\}$

4) On vérifie que les solutions de l'équation sont : $\frac{-5\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$

Exercice 9

1) Soit un réel x :

$\cos^3 x = \cos x \ . \cos^2 x = \cos x \left[\frac{1 + \cos 2x}{2} \right] = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \ . \cos 2x$

$= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos 3x + \cos(-x)}{2} \right] = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos x$

D'où $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$

$n^3 x = \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{4} \cos\left[3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$

$= \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$

D'où $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$

2) $(\cos x \,.\, \sin x)^3 = \cos^3 x \,.\, \sin^3 x$

$= [\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x\,] [\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x\,]$

$= \frac{9}{16} \cos x \sin x - \frac{3}{16} \cos x \sin 3x + \frac{3}{16} \cos 3x \sin x - \frac{1}{16} \cos 3x \sin 3x$

$= \frac{9}{16} \cos x \,.\, \sin x - \frac{1}{16} \cos 3x \,.\, \sin 3x - \frac{3}{16} [\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x\,]$

$= \frac{9}{16} \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} \sin 6x\right) - \frac{3}{16} \sin (3x - x)$

$= \frac{3}{32} \sin 2x - \frac{1}{32} \sin 6x$

3) $(\cos x \,.\, \sin x)^3 = (\frac{\sin 2x}{2})^3 = \frac{1}{8} \sin^3 2x$

Or d'après 1) $\sin^3 2x = \frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 3(2x) = \frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 6x$

Par suite $(\cos x \,.\, \sin x)^3 = \frac{1}{8} [\frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 6x\,]$

$= \frac{3}{32} \sin 2x - \frac{1}{32} \sin 6x$

$A(x) = 3\sin 2x - \sin 6x = 32(\cos x \,.\, \sin x)^3$

Le signe de A(x) est celui de cos x.sin x car le signe de $(\cos x.\sin x)^3$ est celui de :

cos x.sin x.

Or $\cos x \,.\, \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$; donc le signe de A(x) est celui de sin 2x.

x	$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
2x	$-\pi$		0		π
signe de A(x)	0	−	0	+	0

Exercice 10

1) $D_f = \{ x, x \in \mathbb{R} \text{ et } \cos x + \cos 2x + \cos 3x \neq 0 \}$

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = [\cos x + \cos 3x] + \cos 2x$

$= 2\cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x [2\cos x + 1]$

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x [2\cos x + 1] = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = \cos \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \\ \text{ou} \qquad\qquad n \in Z \\ x = \frac{-2\pi}{3} + 2n\pi \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} , \ k \in Z \} \cup \{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \} \cup \{ \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi , \ k \in Z \} \right)$

2) $\begin{cases} f(x) = -\sqrt{3} \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin 2x [2\cos x + 1]}{\cos 2x [2\cos x + 1]} = -\sqrt{3} \\ x \in D_f \cap [0, 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3} \\ x \in D_f \cap [0, 2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{3} + k\pi \quad k \in Z \\ x \in D_f \cap [0, 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in Z \\ x \in D_f \cap [0, 2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{ \frac{\pi}{3} , \frac{5\pi}{6} , \frac{4\pi}{3} , \frac{11\pi}{6} \}$

3) Soit $x \in D_f \cap [0, 2\pi]$, $f(x) \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} 2x \leq -1$ et $x \in D_f \cap [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < 2x \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2} < 2x \leq \frac{7\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{3\pi}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{4} < x \leq \frac{7\pi}{8}$

$f(x) \leq -1$ et $x \in D_f \cap [0, 2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x \in] \frac{\pi}{4} , \frac{3\pi}{8}] \cup] \frac{3\pi}{4} , \frac{7\pi}{8}]$

Exercice 11

1) a) $-2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 4\sin^2 x = 1 + \sqrt{6}$ (E)

$\Leftrightarrow$ $(-1 - \cos 2x) + \sqrt{3}\sin 2x + 2(1 - \cos 2x) = 1 + \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow$ $-3\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}$

b) (E) $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{3}\left[\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right] = \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\frac{5\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{5\pi}{6}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in Z \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13\pi}{24} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases} \quad k \in Z$$

L'ensemble des solutions dans IR est : $S = \{\frac{13\pi}{24} + k\pi,\ k \in Z\} \cup \{\frac{7\pi}{24} + k\pi,\ k \in Z\}$

2) (I) $-2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 4\sin^2 x < 1 + \sqrt{6}$ $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) < \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) < \cos\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2x - \frac{5\pi}{6} < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ $\Leftrightarrow$ $\frac{13\pi}{24} + k\pi < x < \frac{31\pi}{24} + k\pi$

L'ensemble des solutions dans IR de l'inéquation (I) est la réunion des intervalles

$I_k : \left]\frac{13\pi}{24} + k\pi,\ \frac{31\pi}{24} + k\pi\right[$ où k décrit Z.

PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Exercices

Exercice 1 (N.C)

Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{V}$ tels que $\vec{u}.\vec{v} = -2$ et $\vec{u}.\vec{w} = 3$

Calculer : $\vec{v}.\vec{u}$; $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})$; $\vec{u}(\vec{w}-\vec{v})$; $\vec{u}(\vec{v}+2\vec{w})$; $2\vec{u}(3\vec{v}-\vec{w})$

Exercice 2

Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{V}$ tels que :

$\vec{u}(2\vec{v}-\vec{w}) = -1$ et $(3\vec{u})\left(\frac{1}{3}\vec{v}+\vec{w}\right) = 10$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u}.\vec{w}$

Exercice 3 (N.C)

Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$ tels que : $||\vec{u}|| = 2$; $||\vec{v}|| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 3$

1) Calculer $\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})$; $\vec{v}(2\vec{u}-3\vec{v})$; $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$; $(2\vec{u}+\vec{v})(-\vec{u}+3\vec{v})$

2) Calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$

Exercice 4

Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires de $\mathcal{V}$

1) Est-il possible d'avoir $\vec{u}.\vec{v} = \frac{3}{2}$?

2) On suppose que $\vec{u}.\vec{v} = \frac{-1}{3}$

Calculer $\vec{u}(3\vec{u} - 2\vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$.

Exercice 5 (N.C)

Soient O, A et B trois points du plan orienté $\mathcal{P}$ tels que :

$OA = 10$; $OB = 3$ et $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = -24$

Indiquer parmi les réels suivants ceux qu'on peut déterminer sans ambiguité et par suite les calculer : $\cos(\widehat{AOB})$; $\sin(\widehat{AOB})$; $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Exercice 6

Soient O , A et B trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que OA = 6 , OB = 5 et OA . OB = 15.

Déterminer la mesure, en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Exercice 7 (N.C)

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

Dans chacun des cas suivants, calculer le réel $\vec{u}.\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

1) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j}$

2) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u} = \sqrt{6}\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$ (a étant un réel quelconque)

Exercice 8

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{V}$.

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par : $\vec{u} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$

1) Calculer : $||\vec{u}||$; $||\vec{v}||$; $\vec{u}.\vec{v}$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v})$

2) a) Calculer $\cos(\vec{i}, \vec{u})$

b) Calculer $\vec{j}.\vec{u}$. En déduire $\sin(\vec{i}, \vec{u})$

3) Calculer $\cos(\vec{i}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{i}, \vec{v})$

4) Calculer $\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 9

Dans le plan P on considère quatre points O , A, B et C deux à deux distincts.

Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}^2 \end{cases}$$ (Discuter)

Exercice 10 (N.C)

Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

A (0 , 1) ; B (1 , 0) et C (1 , 2).

1) Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.

2) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].

Exercice 11 (N.C)

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; on considère les points $A(\lambda, 0)$ et $B(0, \lambda - 2)$.

Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [AB] et montrer que cette droite passe par un point fixe (indépendant de λ) que l'on déterminera.

Exercice 12 (N.C)

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthnormé on considère les points ;

A (2 , 2) ; B (1 , 1) ; C (4 , 0)

1) Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).

Calculer la distance du point A à la droite (BC).

3) Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) , déterminer la distance AH.

Calculer aussi les distances AB , AC et BC ; vérifier alors que AB.AC = BC.AH.

Exercice 13

Dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé on considère le point A(1 , 1) et la droite Δ dont une équation cartésienne est : $(\cos\theta)\, x + (\sin\theta)\, y - 1 - \cos\theta - \sin\theta = 0$

où θ est un paramètre réel élément de $[0 , 2\pi[$.

Montrer que la distance du point A à la droite Δ est un réel fixe que l'on déterminera.

En déduire que lorsque θ varie ; la droite Δ reste tangente à un cercle fixe que l'on déterminera.

Donner une équation cartésienne de ce cercle.

Exercice 14 (N.C)

Dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé on considère les points :

A(1 , - 3) et B (3 , 2).

Soit M(x, y) un point du plan $\mathcal{P}$.

Traduire analytiquement les égalités :

a) $AM = BM$ b) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AM} = 3$ c) $MA^2 + MB^2 = 11$

d) $MA^2 - MB^2 = 2$ e) $3MA^2 + 2MB^2 = 80$ f) $\frac{MA^2}{MB^2} = 9$

En déduire dans chaque cas l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient l'égalité trouvée.

Exercice 15

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AA'].

Soit un point M variable sur $\mathcal{C} \setminus \{ A , A' \}$ et N le point diamétralement opposé à M sur $\mathcal{C}$.

Soit Q un point quelconque de la droite (AN).

Montrer en le calculant, que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MQ}$ dépend uniquement du point M.

Exercice 16 (N.C)

Dans un plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle ABC et deux points quelconques et distincts X et Y.

On désigne les projetés orthogonaux de X et Y

sur la droite (BC) par A' et A"

sur la droite (CA) par BA' et B"

sur la droite (AB) par C' et C".

Les droites (BC) , (CA) et (AB) étant graduées.

Etablir la relation $\overline{BC} . \overline{A'A"} + \overline{CA} . \overline{B'B"} + \overline{AB} . \overline{C'C"} = 0$

Exercice 17

Dans un plan P on considère un demi cercle (Γ) de diamètre [AB] , C et D deux points distincts de $(\Gamma) \setminus \{ A , B \}$.

On note I le point de rencontre des droites (AC) et (BD).

Montrer que : $\overline{AI} \cdot \overline{AC} + \overline{BI} \cdot \overline{BD} = AB^2$

Exercice 18 (N.C)

On donne deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Soit $\overrightarrow{OS}$ leur résultante (c'est à dire $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$). Un cercle (Γ) passant par O recoupe les droites (OA) , (OB) et (OS) respectivement en A', B' et S'.

Montrer que : $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} + \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OS} \cdot \overline{OS'}$

(**Indication :** On pourra faire intervenir le point O' diamétralement opposé à O sur le cercle (Γ)).

Exercice 19

Dans un plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle ABC rectangle en A et on désigne par A' le milieu du segment [BC] et par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Le point H se projette orthogonalement en I sur (AB) et en J sur (AC).

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$

2) Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Montrer que les droites (IJ) et (AA') sont perpendiculaires.

Exercice 20

On donne les mesures des trois cotés d'un triangle ABC :

$a = BC = \sqrt{3} + 1$; $b = CA = 2$; $c = AB = \sqrt{6}$

Calculer en degrés ; la mesure de chacun des angles géométriques $\widehat{C}$ et $\widehat{B}$ puis celle de l'angle géométrique $\widehat{A}$.

Exercice 21 (N.C)

On donne un triangle ABC tel que C = 45° ; B = 30° ; AB = c = 2 et on demande de calculer b et a avec b = AC et a = BC.

Exercice 22 (N.C)

On considère un triangle ABC tel que : AB = 8 ; AC = 7 et A = 120°

Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

1) Calculer BC

2) Calculer AG , BG et CG.

Exercice 23

Dans le plan $\mathcal{P}$ on donne un carré ABCD,on pose AB = a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et I le centre du carré.

1) Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, exprimer $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ à l 'aide de MI^2 et a^2.

2) a) Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 10\,a^2$

Exercice 24 (N.C)

Dans le plan $\mathcal{P}$ on donne un triangle ABC et on pose BC = a ; CA = b et AB = C

Déterminer et contruire les ensembles suivants :

a) $E = \{ M , M \in \mathcal{P}$ et $MB^2 - MC^2 = c^2 - b^2 \}$ (on pourra remarquer que $A \in E$)

b) $E' = \{ M , M \in \mathcal{P}$ et $MB^2 - MC^2 = b^2 - c^2 \}$ (on pourra commencer par déterminer un point particulier de E').

c) $E'' = \{ M, M \in \mathcal{P}$ et $MB^2 + MC^2 = b^2 + c^2 \}$

Exercice 25

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$ on considère le point $F(O , \frac{1}{2})$; la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{-1}{2}$ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \frac{1}{2} x^2$

1) Construire F , D et $\mathcal{P}$

2) Montrer que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que $MF = d(M , \mathcal{D})$.

($d(M , \mathcal{D})$ désigne la distance entre un point M et la droite $\mathcal{D}$).

3) Soient x_0 un réel et M_0 le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse x_0 , on désigne par Δ la droite tangente à $\mathcal{P}$ en M_0.

a) Donner une équation cartésienne de Δ.

b) Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.

Montrer que Δ est la médiatrice du segment [FH].

c) On suppose de plus que x_0 et non nul.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection T de D et Δ. Calculer alors $\overrightarrow{FT} . \overrightarrow{FM_0}$.

En déduire une autre construction géométrique de Δ.

Corrigés

Exercice 2

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{V}$.

$$\begin{cases} \vec{u}(2\vec{v} - \vec{w}) = -1 \\ (3\vec{u})\left(\frac{1}{3}\vec{v} + \vec{w}\right) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}(2\vec{v}) + \vec{u}(-\vec{w}) = -1 \\ (3\vec{u})\left(\frac{1}{3}\vec{v}\right) + (3\vec{u})\vec{w} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(\vec{u}.\vec{v}) - \vec{u}.\vec{w} = -1 \\ \left(3\ \frac{1}{3}\right)(\vec{u}.\vec{v}) + 3(\vec{u}.\vec{w}) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\vec{u}.\vec{v}) - \vec{u}.\vec{w} = -1 \\ \vec{u}.\vec{v} + 3\vec{u}.\vec{w} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{w} = 2(\vec{u}.\vec{v}) + 1 \\ \vec{u}.\vec{v} + 6\vec{u}.\vec{v} + 3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = 1 \\ \vec{u}.\vec{w} = 3 \end{cases}$$

Exercice 4

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant unitaires donc non nuls et par suite :

$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Comme $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \in [-1, 1]$ et $\frac{3}{2} > 1$

donc il n'est pas possible d'avoir $\vec{u}.\vec{v} = \frac{3}{2}$

2) On a : $\vec{u}(3\vec{u} - 2\vec{v}) = 3\vec{u}.\vec{u} - 2\vec{u}.\vec{v} = 3\,||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} = 3 + \frac{2}{3}$

$$\vec{u}(3\vec{u} - 2\vec{v}) = \frac{11}{3}$$

$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{v} = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 1 - 1 = 0$

Remarque : Pour tout vecteur $\vec{t}$ de $\mathcal{V}$ et tout vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{V}$ on a :

$(\vec{t} + \vec{w})(\vec{t} - \vec{w}) = ||\vec{t}||^2 - ||\vec{w}||^2$

Ce résultat peut être utilisé dans d'autres exercices.

Exercice 6

On a $O \neq A$ et $O \neq B$ donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = ||\overrightarrow{OA}|| \, ||\overrightarrow{OB}|| \cos(\widehat{AOB})$

d'où $15 = 6 \cdot 5 \cos(\widehat{AOB})$ donc $\cos(\widehat{AOB}) = \frac{1}{2}$

Vu que la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est élément de $[\, O , \pi \,[$ donc cette mesure est égale, en radians à $\frac{\pi}{3}$

Exercice 8

$(\vec{i}, \vec{j})$ base orthonormée directe de $\mathcal{V}$; on a : $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $||\vec{u}|| = \sqrt{34}$; $||\vec{v}|| = \sqrt{5}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

Comme $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ alors on a : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

d'où $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-1}{\sqrt{170}}$

2) a) On a : $\vec{i} \cdot \vec{u} = -3$ d'où $\cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{-3}{\sqrt{34}}$

b) $\vec{j} \cdot \vec{u} = 5$ d'où $\cos(\vec{j}, \vec{u}) = \frac{5}{\sqrt{34}}$

Or $(\vec{j}, \vec{u}) = (\vec{j}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{u}) + k \cdot 2\pi$ $k \in Z$

$(\vec{j}, \vec{u}) = \frac{-\pi}{2} + (\vec{i}, \vec{u}) + k \cdot 2\pi$ $k \in Z$

donc $\cos(\vec{j}, \vec{u}) = \cos\left(\frac{-\pi}{2} + (\vec{i}, \vec{u})\right)$ d'où $\cos(\vec{j}, \vec{u}) = \sin(\vec{i}, \vec{u})$

et par suite $\sin(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{5}{\sqrt{34}}$

3) $\cos(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \dfrac{\vec{i}\cdot\vec{v}}{\|\vec{i}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos(\vec{j}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \dfrac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{\|\vec{j}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Or $\cos(\vec{j}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \sin(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{v})$ d'où $\sin(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

4) On a : $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = (\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{i}) + (\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{v}) + n\,.\,2\pi \qquad n \in Z$

Donc $\sin(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \sin(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{i})\cos(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{v}) + \sin(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{v})\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{i})$

$= -\sin(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{u})\cos(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{v}) + \sin(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{v})\cos(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{u})$

$= \dfrac{-5}{\sqrt{34}}\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\ \dfrac{-3}{\sqrt{34}}$

$\sin(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \dfrac{-13}{\sqrt{170}}$

Exercice 9

$$\begin{cases} \vec{OA}\cdot\vec{OM} = \vec{OA}\cdot\vec{OB} \\ \vec{OC}\cdot\vec{OM} = \vec{OC}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{OA}\cdot\vec{OM} = \vec{OA}\cdot\vec{OB} \\ \vec{OC}\cdot\vec{OM} = \vec{OC}\cdot\vec{OC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{OA}(\vec{OM} - \vec{OB}) = 0 \\ \vec{OC}(\vec{OM} - \vec{OC}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{OA}\cdot\vec{BM} = 0 \\ \vec{OC}\cdot\vec{CM} = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Soient Δ la droite passant par B et perpendiculaire à la droite (OA) , et Δ' la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (OC).

Le système S est alors équivalent à $M \in \Delta \cap \Delta'$.

1er cas : O , A et C non alignés donc Δ et Δ' sont sécantes.

Soit I leur point de rencontre. L'ensemble cherché est alors le singleton { I }.

2ème cas : O , A et C sont alignés.

i) $B \in \Delta'$, alors $\Delta = \Delta'$. L'ensemble cherché est alors Δ'.

ii) $B \notin \Delta'$, alors Δ et Δ' sont strictement parallèles et l'ensemble cherché est vide.

Exercice 13

cos θ et sin θ ne s'annulent pas en même temps donc pour tout θ appartenant à [O , 2π [l'équation donnée est bien celle d'une droite.

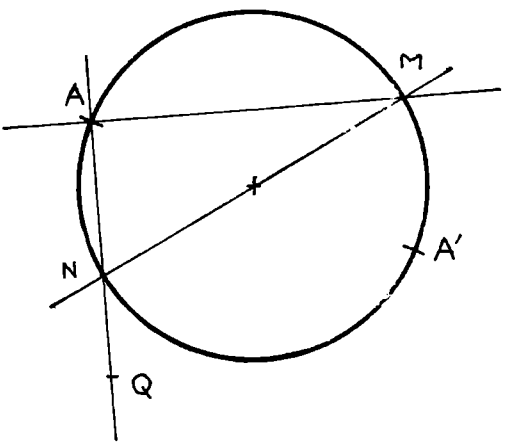
Le repère étant orthonormé donc : $d(A , \Delta) = \dfrac{| \cos\theta + \sin\theta - 1 - \cos\theta - \sin\theta |}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = 1$

Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ, on a alors AH = 1 et Δ et (AH) sont perpendiculaires donc H appartient au cercle C de centre A et de rayon 1 et Δ est tangente à ce cercle au point H.

Une équation cartésienne de C est : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

ou encore $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

Exercice 15



$M \neq A'$ donc $N \neq A$ on a aussi $M \neq A$

[MN] est un diamètre de $\mathcal{C}$ donc (AM) $\perp$ (AN).

Donc pour tout point Q de la droite (AN) ; Q se projette orthgonalement sur (AM) en A.

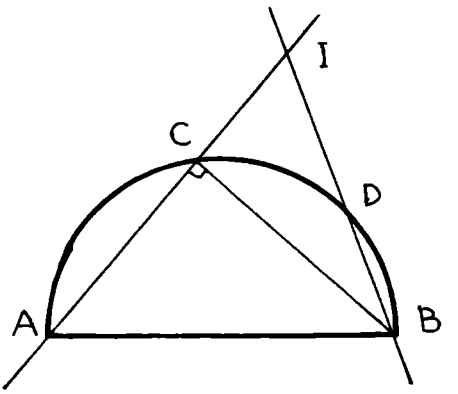
On a aussi $\overrightarrow{MA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{MQ} \neq \vec{0}$

donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overline{MA} \cdot \overline{MA}$ donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MQ} = MA^2$

Remarque : On peut aussi démontrer ce résultat (toujours en utilisant le fait que que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{QA}$ sont orthogonaux) de la façon suivante :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AQ} = MA^2 + 0 = MA^2$

Exercice 17



C et D étant distincts et éléments du même demi cercle de diamètre [AB] donc les droites (AC) et (BD) sont bien sécantes et leur point de rencontre I est distinct de A et B.

Comme [AB] est un diamètre ; donc (CA) et (CB) sont perpendiculaires donc C est le projeté orthogonal de B sur la droite (AI).

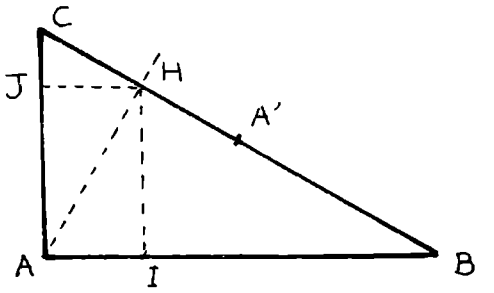
Donc $\overline{AI} \cdot \overline{AC} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ de même $\overline{BI} \cdot \overline{AD} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$

donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overline{AI} \cdot \overline{AC} + \overline{BI} \cdot \overline{AD} = AB^2$

Exercice 19



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{IJ}) = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AJ}) = \overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{JA}) = 0$ (car ABJ est rectangle en A) ; donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}$

On montre de même : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$

2) On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$

D'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$ car A' est le mileu de [BC]

Donc $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} = [\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})]\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux par conséquent les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

Exercice 20

De la formule $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$ on tire $\cos \hat{C} = \frac{1}{2}$

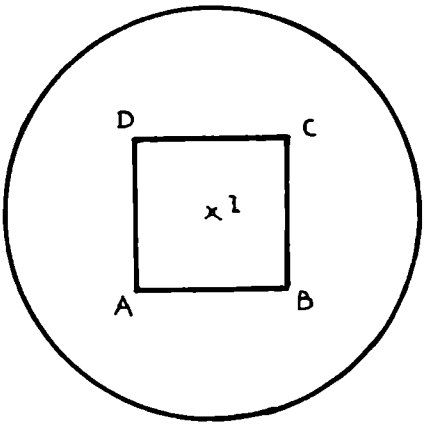
donc $\hat{C} = 60°$ ($C \in]0°, 180°[$)

$C \in]0°, 180°[$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$; d'où $\cos \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; donc $\hat{B} = 45°$

On a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ donc $\hat{A} = 75°$

Exercice 23



1) Le centre I du carré ABCD est le milieu commun des segments [AC] et [BD]

donc $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2}$ et $MB^2 + MD^2 = 2MI^2 + \frac{BD^2}{2}$

De plus $AC^2 = BD^2 = 2a^2$; donc pour tout point M appartenant à $\mathcal{P}$ on a :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MI^2 + 2a^2$

2) a) Soit $M \in \mathcal{P}$ $\quad MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4MI^2 + 2a^2 = 2a^2$

D'où $\quad M = I$

L'ensemble cherché est { I }.

b) Soit $M \in \mathcal{P}$; $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 10a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4MI^2 + 2a^2 = 10a^2$

$\Leftrightarrow \quad MI^2 = AC^2$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon AC.

Exercice 25

2) $MF = d(M, \mathcal{D}) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (\frac{1}{2} - y)^2 = (y + \frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow \quad 2y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} x^2 \quad \Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{P}$

3) a) $\Delta : y = x_0 x - \frac{1}{2} x_0^2$

b) $H (x_0 , \frac{-1}{2})$; le milieu de [FH] a pour coordonnées $(\frac{x_0}{2} , 0)$ donc il appartient à Δ.

D'autre par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ x_0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}x_0\\ -1\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\overrightarrow{FH} = 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont orthogonaux.

Conclusion : Δ est la médiatrice de [FH]

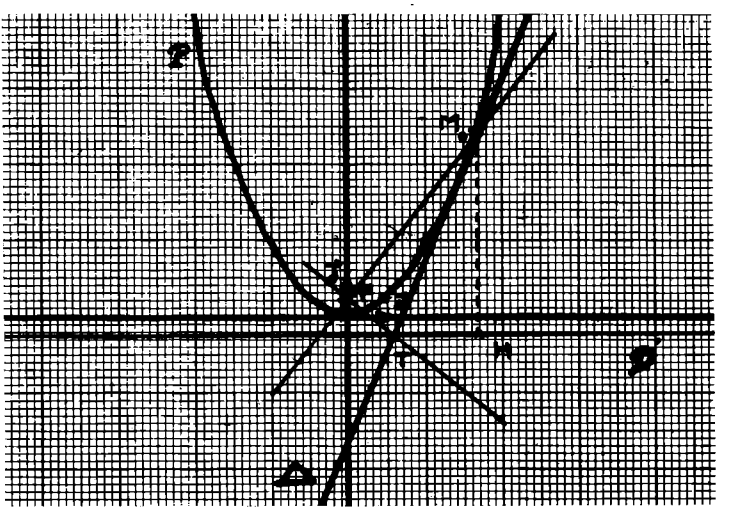
c) $\begin{cases} y = \frac{-1}{2} \\ y = x_0 x - \frac{1}{2} x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} = x_0 x - \frac{1}{2} x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_0^2 - 1}{2x_0} \\ y = \frac{-1}{2} \end{cases}$

Donc D et Δ se rencontrent en J $\left(\frac{x_0^2 - 1}{2x_0}, \frac{-1}{2}\right)$

FT $\begin{pmatrix}\frac{x_0^2 - 1}{2x_0}\\ -1\end{pmatrix}$ et $FM_0\begin{pmatrix}x0\\ \frac{x_0^2 - 1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FT}.\overrightarrow{FM_0} = \frac{x_0^2 - 1}{2} - \frac{x_0^2 - 1}{2} = 0$; donc $\overrightarrow{FT}$ et $\overrightarrow{FM_0}$ sont orthogonaux.

On construit la droite passant par F et perpendiculaire à la droite (FM_0), elle coupe $\mathcal{D}$ en T distinct de M_0, Δ est alors la droite (M_0T).



CERCLES ET ANGLES

Exercices

Exercice 1 (N.C)

1) Montrer que si un parallélogramme est inscrit dans un cercle alors ce parallélogramme est un rectangle.

Exercice 2

Démontrer que l'on peut circonscrire un cercle à un trapèze isocèle (c'est à dire étant donné un trapèze isocèle, il existe un cercle passant par les quatre sommets de ce trapèze).

Exercice 3 (N.C)

Deux cercles C et C' se coupent en A et B.

Soit C un point de C et D un point de C' non situé sur (AC).

Une droite passant par B recoupe C en M et C' en N, les droites (CM) et (DN) se coupent en R.

Montrer que les points A, C, D et R sont cocycliques.

Exercice 4 (N.C)

ABC est un triangle.

On désigne par A', B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C.

Le point H étant l'orthocentre de ABC, montrer qu'il est le centre du cercle inscrit dans le triangle A'B'C'.

Exercice 5

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre [AA'].

Soit J le milieu du segment [OA'].

Une droite variable Δ, distincte de (AA') et de la médiatrice de [OA'] et passant par J, coupe $\mathcal{C}$ aux points B et C.

1) Déterminer l'ensemble E_1 des milieux M du segment [BC], lorsque Δ varie.

2) Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le tirangle ABC.

La droite (A'M) coupe (AH) en D.

a) Montrer que le quadrilatère A'BDC est un parallélogramme.

b) Déterminer l'ensemble des points D quand M décrit E_1.

c) Que représente D pour le triangle ABC ? Justifier.

Exercice 6 (N.C)

On considère un triangle ABC et M un point quelconque du plan. On désigne par P, Q et R les projetés orthgonaux respectifs de M sur (AB) ; (BC) et (AC).

1) Montrer que $(\overrightarrow{MB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{QR}\,\hat{,}\,\overrightarrow{QP}) + k\pi$; $k \in Z$ (on pourra montrer que B, M, P et Q ; M R, Q et C sont cocycliques).

2) Soit C le cercle circonscrit au triangle ABC.

Montrer que les points P, Q et R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle C.

Exercice 7

On considère un triangle ABC et E, F, G trois points appartenant respectivement aux côtés [AB] , [BC] et [AC].

C et C' désignent les cercles circonscrits respectivement aux triangles EBF et CFG.

1) On suppose que les cercles C et C' se coupent en F et F'.

Montrer que les points A, E, G et F' sont cocycliques.

2) On suppose que les cercles C et C' sont tangents.

Montrer en utilisant la tangente à C en F que les points A, E, F et G sont cocycliques.

Exercice 8

Soit un triangle ABC isocèle de sommet princpal A et C son cercle circonscrit.

Soit M un point de C distinct des points A, B et C et on désigne par P le point d'intersection des droites (AM) et (BC) et par C_1 ie cercle circonscrit au triangle BMP.

1) Soit T un point de la tangente à C_1 en B ($T \neq B$).

a) Montrer que les points A, B et T sont alignés.

b) En déduire alors une construction du cercle C_1

2) Quel est l'ensemble des centres des cercles C_1 quand M varie dans C privé des points A, B et C.

Exercice 9

Dans un plan orienté $\mathcal{P}$ on considère un trapèze isocèle et C le cercle circonscrit à ce trapèze (voir exercice 2).

Soit M un point quelconque de C distinct de A, B, C et D.

H est le projeté orthogonal de A sur la droite (MD)

K est le projeté orthogonal de C sur la droite (MB) et on note P le point d'intersection des droites (AH) et (CK).

1) Vérifier que : $(\vec{AB}, \vec{AD}) = (\vec{BC}, \vec{BA}) + k\pi \quad ; \quad k \in Z$

$$(\vec{CB}, \vec{CD}) = (\vec{DC}, \vec{DA}) + n\pi \quad ; \quad n \in Z$$

2) Vérifier que : $(\vec{PK}, \vec{PH}) = (\vec{MK}, \vec{MH}) + q\pi \quad ; \quad q \in Z$

3) Montrer que : P appartient à C.

Exercice 10 (N.C)

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC, un point D de la droite (AB) ; un point E de (AC) et un point M du cercle circonscrit C_1 au triangle ABC.

Les cercles C_2 et C_3 respectivement circonscrits aux triangles BDM et CEM se recoupent en P.

Démontrer que les points D, E et P sont alignés.

Indication : On distinguera deux cas : les cercles C_2 et C_3 sont tangents en M ou sécants en M et P.

Exercice 11

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A et on désigne par A' le milieu du segment [BC] et par H le projeté orthgonal de A sur (BC). Le point H se projette orthgonalement en I sur (AB) et en J sur (AC).

1) Vérifier que $(\overrightarrow{AI}^{\wedge}, \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BA'}^{\wedge}, \overrightarrow{BA}) + k\pi \qquad k \in Z$

2) Justifier brièvement le fait que les points A, I, H et J sont cocycliques.

Montrer alors que $(\overrightarrow{IJ}^{\wedge} \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{BA}^{\wedge} \overrightarrow{HA}) + n\pi \quad ; \quad n \in Z$

3) Montrer que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

(**Remarque :** Une démonstration du fait que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires, utilisant la notion du produit scalaire, a été proposé dans un chapitre antérieur).

Exercice 12

On considère dans le plan orienté, un triangle ABC et M un point fixe de la droite (BC) (distinct de B et C).

Une droite variable Δ passant par M et distincte de la droite (BC) coupe la droite (AC) en N et la droite (AB) en P ; on désigne par S le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles CMN et BMP.

Montrer que lorsque Δ varie, le point S décrit le cercle circonscrit au triangle ABC privé des points B et C.

Exercice 13

Dans un plan orienté $\mathcal{P}$ on considère un cercle $\mathcal{C}$ et deux cordes perpendiculaires [AB] et [CD] qui ne sont pas des diamètres.

On note M le point d'intersection des droites (AB) et (CD) et M' le milieu du segment [BC].

1) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle MBC.

2) On se propose de montrer, en utilisant deux méthodes, que les droites (MM') et (AD) sont perpendiculaires.

1ère méthode :

a) Quel est la nature du triangle MCM' ?

En déduire que $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) + k.\pi$ avec $k \in Z$.

b) Montrer que $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} + n.\pi$ avec $n \in Z$.

2ème méthode :

Soit Δ la droite tangente en M au cercle circonscrit au triangle MBC et T un point de Δ distinct de M.

a) Montrer que : $(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) + k'\pi$ avec $k' \in Z$.

Que peut-on en déduire pour les droites Δ et (DA).

Montrer que les droites (DA) et (MM') sont perpendiculaires.

Corrigés

Exercice 2

Soit ABCD un trapèze isocèle, désignons par Δ la médiatrice commune des segments [AB] et [CD] et par S la symétrie orthgonale d'axe Δ.

On a alors : S(A) = B ; S(C) = D ; S(D) = C

donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) + k_1 . 2\pi \quad ; \quad k_1 \in Z$

d'où $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) + k . 2\pi \quad ; \quad k \in Z$

A , B , C étant non alignés, donc les points A, B, C et D sont cocycliques, donc il existe un cercle passant par les quatre points A, B, C et D.

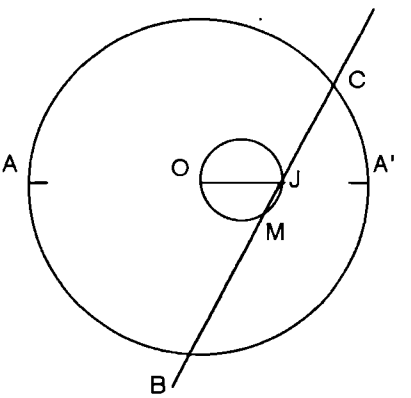
Exercice 5

Soit M le milieu de [BC].

On a OB = OC et BM = CM ; alors la droite (OM) est la médiatrice de [BC].

Par suite $\widehat{OMB} = 90°$, d'où $\widehat{OMJ} = 90°$

Donc l'ensemble E_1 des points M est le cercle de diamètre [OJ] privé de O et J.



2) a) (AH) $\perp$ (BC) et (OM) $\perp$ (BC) alors (AH) et (OM) sont parallèles, c'est à dire (AD) et (OM) sont parallèles.

Dans le triangle ADA', les droites (AD) et (OM) sont parallèles et O est le milieu de [AA'] donc M est le milieu de [A'D].

Or M est le milieu de [BC] , donc A'BDC est un parallélogramme.

b) On a $\overrightarrow{A'D} = 2\overrightarrow{A'M}$

Alors D est l'image de M par l'homothetie h de centre A' et de rapport 2.

Si M décrit E_1 alors D décrira $h(E_1)$.

h(O) = A et h(J) = O alors $h(E_1)$ est le cercle de diamètre [OA] privé de O et A.

c) $C \in \mathcal{C}$ alors (AC) $\perp$ (A'C) , comme (BD) et (A'C) sont parallèles alors (BD) $\perp$ (AC) donc (BD) est la hauteur du triangle ABC issue de B.

D est alors le point d'intersection des hauteurs (AH) et (BD), donc D est l'orthocentre de ABC.

Exercice 7

1) $(\overrightarrow{F'F}, \overrightarrow{F'G}) \equiv (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CG})\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CG}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})\ [\pi]$

$(\overrightarrow{F'E}, \overrightarrow{F'F}) \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF})\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BF}) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\ [\pi]$

D'où $(\overrightarrow{F'E}, \overrightarrow{F'G}) = (\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + k\pi$; $k \in Z$

C'est à dire $(\overrightarrow{F'E}, \overrightarrow{F'G}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ [\pi]$ car $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \pi + n2\pi$

Par suite $(\overrightarrow{F'E}, \overrightarrow{F'G}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) + m\pi$; $m \in Z$

Donc les points A, E, G et F' sont cocycliques.

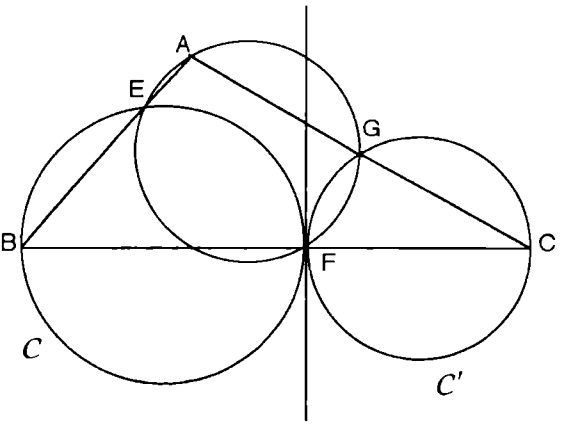
2) Soit M un point de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ en F et M $\neq$ F

$(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FE}) \equiv (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BE}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FG}) \equiv (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CG}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})\ [\pi]$

Donc $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})\ [\pi]$

C'est à dire $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}) \equiv (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE})\ [\pi]$

Donc les points A , E, F et G sont cocycliques.



Exercice 8

1) a) On a $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BA}) + 2k\pi$; $k \in Z$

Or $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BP}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MP}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP}) + n\pi$; $n \in Z$

c'est à dire $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BP}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + m\pi$; $m \in Z$

D'autre part $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + 2k\pi$; $k \in Z$

c'est à dire $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + k'\pi$; $k' \in Z$

Par suite $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + p\pi$; $p \in Z$

Les points A, B, C et M sont cocycliques, donc $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + n\pi$; $n \in Z$

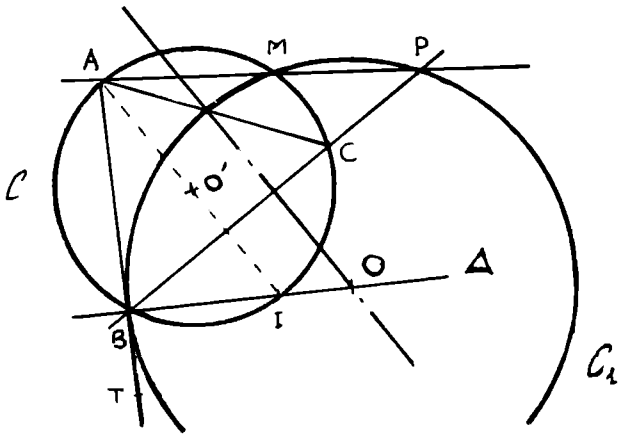
Le triangle ABC est isocèle de sommet principl A, donc $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\ [2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}) = k\pi$; $k \in Z$

C'est à dire les points A, B et T sont alignés.

b) La droite (AB) est alors la tangente à C_1 en B.

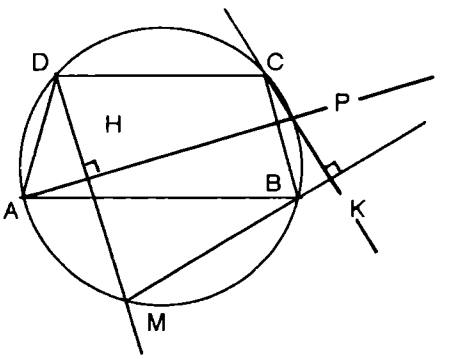
Le centre O de C_1 est le point d'intersection de la médiatrice de [BM] avec la perpendiculaire Δ à (AB) en B.



2) On vérifie que le point O décrit la droite Δ privée de B et du point I diamétralement opposé à A dans le cercle C.

Exercice 9

1)



Soit S la symétrie orthgonale d'axe la médiatrice commune des segments [AB] et [CD].

On a alors S(A) = B ; S(B) = A et S(D) = C

D'où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + k\pi$; $k \in Z$

$= (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + k\pi$; $k \in Z$

On montre de même que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + k\pi$; $k \in Z$

2) On a (HM) ⊥ (HP) et (KM) ⊥ (KP), donc les points H et K appartiennent au cercle de diamètre [MP]

Par suite les points M , H, P et K sont cocycliques, d'où $(\overrightarrow{PK}, \overrightarrow{PH}) = (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MH}) + k\pi$; $k \in Z$.

3) Les vecteurs $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{PC}$ sont colinéaires, de même les vecteurs $\overrightarrow{PH}$ et $\overrightarrow{PA}$.

Donc $(\overrightarrow{PC}\,;\,\overrightarrow{PA}) = (\overrightarrow{PK}\,;\,\overrightarrow{PH}) + k\pi$

D'après 2) on aura $(\overrightarrow{PC}\,;\,\overrightarrow{PA}) = (\overrightarrow{MK}\,;\,\overrightarrow{MH}) + n\pi$; $n \in Z$

C'est à dire $(\overrightarrow{PC}\,,\,\overrightarrow{PA}) = (\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MD}) + m\pi$; $m \in Z$

Or les points M, B, D et A sont cocycliques ; d'où $(\overrightarrow{PC}\,,\,\overrightarrow{PA}) \equiv (\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD})\ [\pi]$

Finalement d'après 1) $(\overrightarrow{PC}\,;\,\overrightarrow{PA}) \equiv (\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})\ [\pi]$

A, B et C étant non alignés, alors les points A, B, C et P sont cocycliques, c'est à dire que P est un point du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 11

1) Le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [BC] ; donc AA' = A'B ;

c'est à dire que le triangle AA'B est isocèle de sommet principal A'

d'où $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BA'}\,;\,\overrightarrow{BA}) + k\pi$; $k \in Z$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires, il en résulte que $(\overrightarrow{AI}\,,\,\overrightarrow{AA'}) \equiv (\overrightarrow{BA'}\,,\,\overrightarrow{BA})\ [\pi]$

2) (IH) $\perp$ (IA) et (JH) $\perp$ (JA) ; donc les points A, I, J et H appartiennent au cercle de diamètre [AH] et par suite : $(\overrightarrow{IJ}\,;\,\overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{HJ}\,,\,\overrightarrow{HA}) + k\pi$; $k \in Z$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires, il en résulte que $(\overrightarrow{IJ}\,;\,\overrightarrow{IA}) \equiv (\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{HA})\ [\pi]$

3) $(\overrightarrow{IJ}\,,\,\overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{IJ}\,;\,\overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{AA'}) + k\pi$; $k \in Z$

$= (\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{BA'}\,,\,\overrightarrow{BA}) + k'\pi$; $k' \in Z$

$= (\overrightarrow{BA'}\,,\,\overrightarrow{HA}) + n\pi$; $n \in Z$

$= \dfrac{\pi}{2} + m\pi$; $m \in Z$

Ainsi les droites (IJ) et (AA') sont perpendiculaires.

Exercice 12

Les cercles circonscrits aux triangles CMN et BMP ne peuvent être tangents, alors le point S existe et il est distinct de B et C.

Notons (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.

$(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}) = (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SM}) + (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SB}) + k\pi \ ; \ k \in Z$

$= (\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NM}) + (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PB}) + k'\pi \ ; \ k' \in Z$

$= (\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NM}) + (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{PB}) + k''\pi \ ; \ k'' \in Z$ car PM et MN sont colinéaires

$= (\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{PB}) + n\pi \ ; \ n \in Z$

$= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + n'\pi \ ; \ n' \in Z$ car $N \in (AC)$ et $P \in (AB)$

Les points A, B et C étant non alignés, alors les points A, B, C et S sont cocycliques, donc $S \in (\Gamma) \setminus \{ B, C \}$.

Réciproquement soit $S \in (\Gamma) \setminus \{ B , C \}$

On vérifie que la droite (AC) ne peut pas être tangente au cercle circonscrit au triangle SCM, ainsi la droite (AC) recoupe ce cercle au point N.

De même la droite (AB) coupe le cercle circonscrit au triangle BMS aux points B et P.

Montrons que les points M, N et P sont alignés.

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MS}) + (\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MP}) + k\pi \ ; \ k \in Z$

$= (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BP}) + k'\pi \ ; \ k' \in Z$

$= (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BA}) + k''\pi \ ; \ k'' \in Z$

$= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BS}) + (\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BA}) + k'''\pi \ ; \ n \in Z$

Donc $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = n\pi \ ; \ n \in Z$ et par la suite les points M, N et P sont alignés.

Ainsi le point S décrit $(\Gamma) \setminus \{ B , C \}$ lorsque la droite Δ varie.

TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN

Exercices

Exercice 1 (N.C)

1) Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $AB = CD$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 2\pi k \ ; \ k \in Z$.

Montrer qu'il existe une rotation unique r transformant A en C et B en D.

2) **Application :**

Soit ABC un triangle équilatéral direct.

a) Quel est le centre et la mesure de l'angle de la rotation r transformant A en B et B en C.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r' dont on précisera le centre et l'angle telle que $r'(A) = C$ et $r'(B) = D$ où D est le symétrique de A par rapport à C.

Exercice 2

Soit ABC un triangle de sens direct.

Extérieurement à celui-ci, on construit les carrés ACDE, BAFG et CBHI.

1) Montrer que le triangle ACI est l'image du triangle DCB par une rotation que l'on précisera.

En déduire que les droites (AI) et (BD) sont perpendiculaires.

2) Montrer que les droites (CG) et (AH) sont perpendiculaires.

3) Construire l'image du triangle AFE par la rotation r (A, $\frac{\pi}{2}$)

4) Soit K le milieu du segment [EF] et K' = r (A, $\frac{\pi}{2}$) (K)

Montrer que les droites (AK') et (BC) sont parallèles.

En déduire que la droite (AK) est une hauteur du triangle ABC.

Exercice 3

On considère un triangle ABC de sens direct.

I, J et K désignent les milieux respectifs des côtés [BC] , [AC] et [AB].

1) a) Construire le point M tel que : MA = MC et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{2}$ [2π]

b) Construire le point N tel que : NA = NB et $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \equiv \frac{-\pi}{2}$ [2π]

2) Montrer qu'il existe une rotation unique r telle que : r (M) = I et r (J) = K

3) Montrer que r (I) = N

4) En déduire que :

a) Le triangle MIN est un triangle rectangle isocèle.

b) Le centre de la rotation r est le milieu du segment [MN].

Exercice 4

Soit ABC un triangle de sens direct.

Soient les points B' et C' définis par : B' = r (A , $\frac{-\pi}{2}$) (B) et C' = r (A, $\frac{\pi}{2}$) (C)

1) Montrer que B'C = BC' et que les droites (B'C) et (BC') sont perpendiculaires.

2) Soit I le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A par rapport à I.

a) Déterminer l'image du parallélogramme ABDC par la rotation r $(A , \frac{\pi}{2})$.

b) En déduire que B'C' = 2AI et que les droites (AI) et (B'C') sont perpendiculaires.

Exercice 5

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On considère un point M du segment [AB] et un point N dans [BC] tels que AM = BN

1) Montrer que les droites (AN) et (DM) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (CM) et (DN).

2) Soit I le point d'intersection des droites (CM) et (AN).

Montrer que les droites (DI) et (MN) sont perpendiculaires.

Exercice 6

Soit un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

P est un point du segment [BC] distinct de B.

Q est le point d'intersection des droites (AP) et (CD).

La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1) Faire une figure.

2) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Préciser l'image par r de la droite (BC).

b) Déterminer les images par r des points R et P.

En déduire la nature des triangles RAQ et PAS.

Exercice 7 (N.C)

A) On considère un triangle ABC de sens direct, à l'extérieur duquel on construit les carrés ACDE de centre Q et BAFG de centre R.

Soit A' le milieu du segment [BC]

1) Montrer que $\overrightarrow{A'Q} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BE}$ et que $\overrightarrow{A'R} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CF}$

2) Utiliser la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour montrer que BE = CF et déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BE}\ ,\ \overrightarrow{FC})$.

3) En déduire la nature du triangle A'QR.

B) On construit à l'extérieur du triangle ABC les triangles ABD, BCE et CAF isocèles et rectangles respectivement en D, E et F.

1) Soit r' la rotation de centre A' et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Montrer que r'(F) = D et que les droites (EF) et (CD) sont perpendiculaires.

2) Montrer que les droites (DF) et (AE) sont perpendiculaires.

En déduire alors que les droites (AE) ; (BF) et (CD) sont concourantes.

Exercice 8 (N.C)

On donne un cercle fixe $\mathcal{C}$ de centre O et un point fixe I.

Un point variable A décrit $\mathcal{C}$.

On considère le carré ABCD de centre I.

Trouver les lieux géométriques des sommets B, C et D.

Exercice 9 (N.C)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB].

A tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A, on associe les carrés AMNS et AMN'S'.

Déterminer les ensembles décrits respectivement par S et S' lorsque M décrit $\mathcal{C} \setminus \{A\}$.

Exercice 10

On considère dans le plan, deux cercles isométriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O', tangents en A.

A tout point M de $\mathcal{C}$, on associe le point M' de $\mathcal{C}'$ tel que $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{O'M'}) \equiv \frac{\pi}{2}$ [2π]

1) Montrer que la médiatrice de [MM'] passe par un point fixe I. Construire ce point.

2) La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme O en J et la rotation de centre J et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ transforme M en M".

Montrer que la droite (M'M") passe par un point fixe lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

Exercice 11 (N.C)

On considère dans le plan, un point fixe O et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

A tout point M distinct de O, on associe les points N et I tels que N = r (M) et I = r (N)

1) Montrer que le triangle MNI est équilatéral.

2) On construit les points M', N' et I' tels que les triangles NIM', MIN' et MNI' soient équilatéraux directs.

Montrer que MM' = NN' = II' et que les droites (MM') (NN') et (II') sont concourantes.

Exercice 12

Soit un triangle OAB isocèle de sommet principal O et un point variable M du segment [AB] (M ≠ A et M ≠ B).

La parallèle à la droite (OB) issue de M, coupe (OA) en A' et la parallèle à la droite (OA) issue de M, coupe (OB) en B'.

1) Montrer que OA' = BB'.

2) a) En déduire qu'il existe une rotation r telle que r (O) = B et r (A') = B'.

Déterminer l'angle de cette rotation en fonction de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

b) Montrer que r(A) = O

c) Déterminer alors le centre Ω de cette rotation.

3) Montrer que les points O, A', B' et Ω sont cocycliques.

Exercice 13

Soit ABC un triangle non isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}$ [2π]

On place sur la demi-droite [BA) un point P distinct de B et sur la demi-droite [CA) un point Q tels que BP = CQ.

1) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(B) = C et r (P) = Q.

Préciser l'angle de r et construire son centre O.

2) Quel est la nature du triangle OPQ.

3) Construire les points P sur [BA) et Q sur [CA) tels que BP = CQ = PQ.

Exercice 14

Soient AIBI' un losange et r la rotation de centre A telle que r(I) = I'.

1) Soit C le point tel que B = r(C) (ou encore $C = r^{-1}(B)$)

Montrer que C est situé sur le cercle de centre I et de rayon IA.

2) Soit M un point distinct de B et C et M' = r(M).

Montrer que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) + k\pi \quad ; \quad k \in Z$

3) En déduire que les points M , B et M' sont alignés si et seulement si on a :

$(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + k\pi \quad ; \quad k \in Z$

4) Déterminer alors l'ensemble des points M tels que M , B et M' soient alignés.

Exercice 15

Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $(\overline{AB}\ ^{\wedge}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

I , J et K désignent les milieux respectifs des segments [BC] , [AC] et [AB].

On note $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ les cercles de diamètres respectifs [AI] , [BI] et [CI].

1) a) Faire une figure.

b) Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Déterminer les images par r des cercles $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_C$

2) Pour tout point M de $\mathcal{C}_A$ distinct de I , J et K, on note N le point où la droite (MK) recoupe $\mathcal{C}_B$ et P le point où la droite (MJ) recoupe $\mathcal{C}_C$.

a) Montrer que les droites (IM) et (IP) sont perpendiculaires (on pourra utiliser le fait que les points A , M , I et J sont cocycliques).

b) Déterminer r (P) et r (M)

En déduire que I est le milieu de [NP] et que le triangle MNP est isocèle rectangle.

Exercice 16

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point fixe de $\mathcal{C}$.

A tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A on associe le point P de $\mathcal{C}$ tel que :

$(\overrightarrow{OM}\ ^{\wedge}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Le point Q est le symétrique de P par rapport à (AM).

Déterminer l'ensemble des points Q lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé de A.

Exercice 17

On donne dans un plan P orienté un triangle ABC équilatéral de sens direct.

On désigne par : $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre A et passant par B et C.

$\mathcal{C}_2$ le cercle de centre B et passant par C et A.

$\mathcal{C}_3$ le cercle de centre C et passant par A et B.

Soient I , J et K les points définis par :

$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{I, C\}$; $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{J, A\}$; $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \{K, B\}$

1) Montrer que le triangle IJK est équilatéral.

2) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit M un point de $\mathcal{C}_1$ distinct de I et C.

On pose N = R(M) et on se propose de déterminer N.

a) Quelle est l'image du cercle $\mathcal{C}_1$ par R ?

b) Montrer que le point N appartient à $\mathcal{C}_2$ et que MNC est équilatéral de sens direct.

c) Comparer $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MI})$ et $(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KI})$. En déduire que N ∈ (IM).

3) On désigne par r la rotation de centre M et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

a) Déterminer $\mathcal{C}'_3 = r(\mathcal{C}_3)$

b) Montrer que $B \in \mathcal{C}'_3$

Exercie 18

Soient (D) et (D') deux droites parallèles et A un point n'appartenant ni à (D) ni à (D').

Construire un triangle équilatéral ABC tel que B ∈ (D) et C ∈ (D').

Exercice 19

On se donne une droite Δ et un cercle $\mathcal{C}$ et un point A.

Construire un carré ABCD tel que B ∈ Δ et D ∈ $\mathcal{C}$.

Exercice 20

Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites données et A un point donné.

Le but de l'exercice est de construire un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que :

$B \in \mathcal{D}$; $C \in \mathcal{D}'$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Ac}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in Z)$

a) Supposons que de tels points existent.

Montrer que C = r (B) où r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) Soit $\mathcal{D}'' = r(\mathcal{D})$

Montrer que $C \in \mathcal{D}'' \cap \mathcal{D}'$

c) En déduire la construction demandée (discuter).

Exercice 21

Soit r une rotation de centre O.

I un point distinct de O.

Construire un point A dont l'image A' par r est telle que I soit le milieu de [AA'].

Les exercices suivants (de 22 à 27) sont réservés aux élèves des Sections Sciences Expérimentales et Techniques.

Exercice 22 (N.C)

On donne un triangle fixe ABC et on construit le parallélogramme BCDE.

Les perpendiculaires menées de D à (AB) et de E à (AC) se coupent en un point M.

Déterminer l'ensemble des points M lorsque D décrit une droite Δ donnée, puis lorsque D décrit un cercle C donné.

Exercice 23

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de diamètre [AD] donné.

B est un point fixe de $\mathcal{C}$ distinct de A et D

Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ distinct de A et B.

On note H l'orthocentre du triangle AMB.

a) Démontrer que les droites (MH) et (BD) sont parallèles.

b) Démontrer que les droites (BH) et (MD) sont parallèles.

c) En déduire l'ensemble des points H lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B.

Exercice 24

Soient D_1, D_2 et D_3 trois droites parallèles et distinctes.

Soit P un point du plan, extérieur aux trois droites.

On mène par P une droite Δ qui coupe D_1 en A, D_2 en B et D_3 en C, puis on mène par P une droite Δ' qui coupe D_1 en D, D_2 en E et D_3 en F.

Soit Q le point d'intersection de (BD) avec (AE)

Soit R le point d'intersection de (BF) avec (CE)

On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [AD], [BE], [CF]

1) a) Montrer que les points I, J et P sont alignés.

b) Montrer de même que I, J et Q sont alignés.

2) Montrer que les points J, K et P sont alignés, ainsi que les points J, K et R.

3) Montrer alors que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 25 (N.C)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] donné.

Soit I un point de la droite (AB) extérieur à $\mathcal{C}$.

A chaque point M de $\mathcal{C}$, distinct de A et B, on associe le point M', point d'intersection de (IM) avec (BN), N étant le point diamétralement opposé à M.

Déterminez le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit $\mathcal{C} \setminus \{A,B\}$.

Exercice 26 (N.C)

Deux droites D et Δ se coupent en un point A

Deux points B et C distincts de A, decrivent respectivement D et Δ de manière à ce que la droite (BC) demeure parallèle à une droite D_1 donnée sécante avec D et Δ.

Soient B_o et C_o deux points fixes vérifiants les conditions précédentes.

1) On note I le milieu de [BC]

Quelle est la figure décrite par I.

2) Soit O un point donné n'appartenant ni à D ni à Δ.

Quelle est la figure décrite par G centre de gravité du triangle OBC.

3) Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{B_oC_o}$

4) Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D_1.

Exercice 27 (N.C)

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et Δ une droite non sécante à $\mathcal{C}$.

Soit A un point extérieur à $\mathcal{C}$ et à Δ et H son projeté orthogonal sur Δ.

On désigne par Δ' la droite passant par le milieu K de [AH] et parallèle à Δ.

On suppose que Δ' coupe $\mathcal{C}$ en deux points B et C

On note B' et C' les points d'intersection de Δ respectivement avec (AB) et (AC).

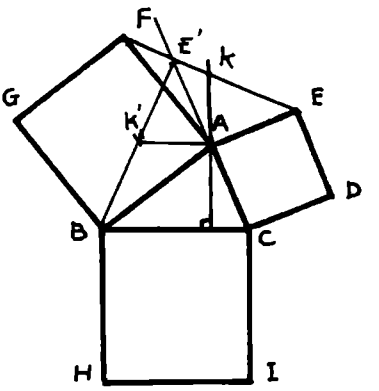
1) Montrez que B est le milieu de [AB'] et que C est le milieu de [AC'].

2) Etant donnée une droite Δ non sécante à un cercle (Γ) donné et un point A extérieur à Δ et (Γ)

Construire un point R de Δ tel que le milieu de [AR] soit sur (Γ).

Corrigés

Exercice 2



Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a alors r(D) = A, r(C) = C et r(B) = I

Ainsi le triangle ACI est l'image de DCB par la rotation r.

r(D) = A et (B) = I alors les droites (AI) et (DB) sont perpendiculaires.

2) Soit r' la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

r'(H) = C et r'(A) = G alors les droites (AH) et (CG) sont perpendiculaires.

3) On note r'' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

r''(F) = B ; r''(K) = K' et r''(E) = E'

Comme les triangles AEE' et ACE sont rectangles en A alors les points A, C et E' sont alignés.

Le triangle BE'C vérifie alors :

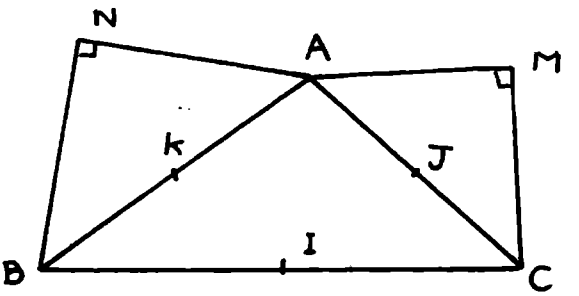
A est le milieu de [E'C] et K' est le milieu de [BE'] d'où $\overrightarrow{AK'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

En particulier les droites (AK') et (BC) sont parallèles.

Comme de plus, les droites (AK) et (AK') sont perpendiculaires, en déduit alors que les droites (AK) et (BC) sont perpendiculaires, donc la droite (AK) est une hauteur du triangle ABC issue du point A.

Exercice 3

1)



2) On a $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{JA}$, en particulier IK = JA

De plus le triangle AMC étant isocèle et rectangle en M alors on a JM = JA = JC

D'où IK = JM

D'autre part $(\overrightarrow{JM}\ ^\wedge\ \overrightarrow{KI}) = (\overrightarrow{JM}\ ^\wedge\ \overrightarrow{JC}) + 2\pi k$; $k \in Z$

C'est à dire $(\overrightarrow{JM}\ ^\wedge\ \overrightarrow{KI}) = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in Z$

Ainsi on a : $\begin{cases} JM = IK \\ (\overrightarrow{JM}\ ^\wedge\ \overrightarrow{KI}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

Donc il existe une rotation r unique d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et telle que r(M) = I et r(J) = K

3) On pose r(I) = I'

Comme $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KB}$ et r(J) = K, on a alors : $\begin{cases} JI = KI' \\ (\overrightarrow{JI}\ ^\wedge\ \overrightarrow{KI'}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

Or JI = KN et $(\overrightarrow{JI}\ ^\wedge\ \overrightarrow{KN}) \equiv (\overrightarrow{KB}\ ^\wedge\ \overrightarrow{KN}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

D'où $\begin{cases} KN = KI' \\ (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{KI'}) \equiv (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{KN}) \ [2\pi] \end{cases}$

Ainsi $\overrightarrow{KI'} = \overrightarrow{KN}$ et par suite $I' = N$ D'où $r(I) = N$

4) $\begin{cases} r(M) = I \\ r(I) = N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MI = IN \\ (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IN}) \equiv \frac{-\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MI = IN \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$

D'où IMN est un triangle isocèle rectangle en I.

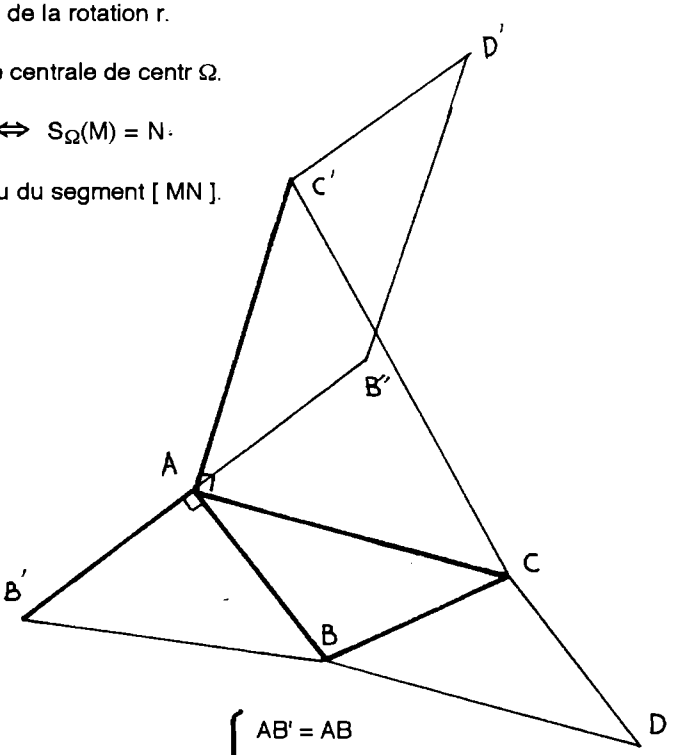
Notons Ω le centre de la rotation r.

r o r est la symétrie centrale de centr Ω.

ror (M) = r(I) = N $\Leftrightarrow$ $S_\Omega(M) = N$.

Ainsi Ω est le milieu du segment [MN].

Exercice 4



1) $\begin{cases} AB = AB' \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) \equiv \frac{-\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB' = AB \\ (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$

Ainsi B est l'image de B' par la rotation $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$

D'autre part $C' = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(C)$; d'où $BC' = B'C$ et $(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

2) On note r la rotation $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$

r transforme le parallélogramme ABDC en le parallélogramme AB"D'C' où B" est le symétrique de B' par rapport à A (voir figure).

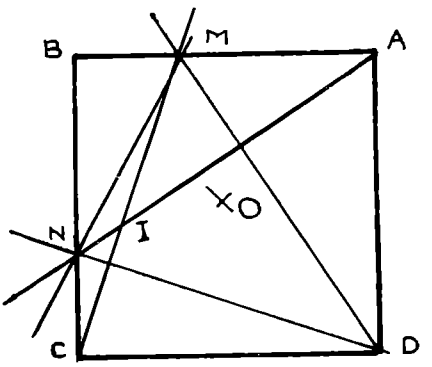
r (I) = I' , I' milieu de [B"C'] et A est le milieu de [B'B"].

d'où $\overrightarrow{AI'} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{B'C'}$, en particulier les droites (AI') et (B'C') sont parallèles et $AI' = \frac{1}{2}\ B'C'$.

D'autre part, les droites (AI) et (AI') sont perpendiculaires et AI = AI'.

D'où (AI) et (B'C') sont perpendiculaires et 2AI = B'C'

Exercice 5



1) $(\overrightarrow{AM}\ ^{\wedge}_{,}\ \overrightarrow{BN}) \equiv (\overrightarrow{AB}\ ^{\wedge}_{,}\ \overrightarrow{BC})\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AM}\ ^{\wedge}_{,}\ \overrightarrow{BN}) \equiv (\overrightarrow{BA}\ ^{\wedge}_{,}\ \overrightarrow{BC}) + \pi\ [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AM}\ ^{\wedge}_{,}\ \overrightarrow{BN}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

Ainsi on a : $\begin{cases} AM = BN \\ (\overrightarrow{AM}\ ^{\wedge}\ \overrightarrow{BN}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

Donc il existe une rotation unique r d'angle $\frac{\pi}{2}$ telle que : r (A) = B et r(M) = N

Il s'agit de fait de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ car $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)(A) = B$.

On vérifie ainsi que r(D) = A et r(M) = N ; donc les droites (DM) et (AN) sont perpendiculaires.

De même r(C) = D et r(M) = N ; donc les droites (CM) et (DN) sont perpendiculaires.

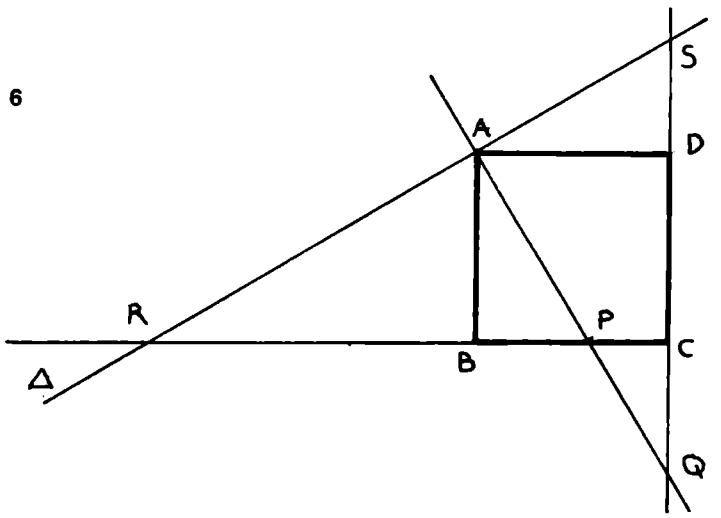
2) Comme (AN) et (DM) sont perpendiculaires, alors la droite (AN) est une hauteur du triangle MND issue de N.

Les droites (CM) et (DN) sont perpendiculaires, alors la droite (CM) est une hauteur du triangle MND issue de M.

Les hauteurs (AN) et (CM) se rencontrent en I, alors I est l'orthocentre du triangle MND, et par suite les droites (DI) et (MN) sont perpendiculaires.

Exercice 6

1)



2) a) On a r(B) = D , donc r transforme la droite (BC) en la droite qui lui est perpendiculaire et passant par D ; c'est à dire r ((BC)) = (DC).

b) La rotation r transforme la droite (AP) en Δ et (BC) en (DC).

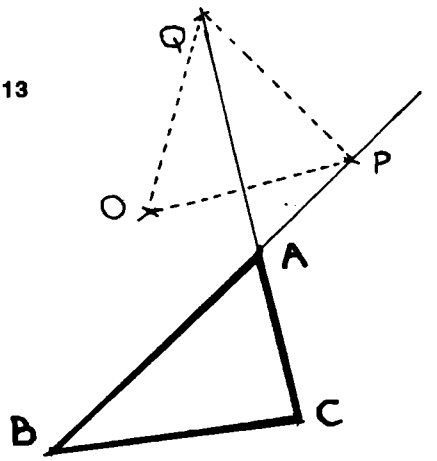
Or P est le point d'intersection de (AP) et (BC) alors r(P) est le point d'intersection de Δ et (CD) c'est à dire r(P) = S

De même, r transforme Δ en la droite (AP) et R étant le point d'intersection de Δ et (BC) ; alors r(R) est le point d'intersection de (AP) et (DC) c'est à dire r(R) = Q.

On a : $\begin{cases} AR = AQ \\ (\overrightarrow{AR}\,^{\wedge}\,\overrightarrow{AQ}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} AP = AS \\ (\overrightarrow{AP}\,^{\wedge}\,\overrightarrow{AS}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

Donc les triangles RAQ et PAS sont isocèles rectangles en A.

Exercice 13



1) $(\overrightarrow{BP}\,^{\wedge}\,\overrightarrow{CQ}) \equiv (\overrightarrow{BA}\,^{\wedge}\,\overrightarrow{CA})\ [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BP}\,^{\wedge}\,\overrightarrow{CQ}) \equiv (\overrightarrow{AB}\,^{\wedge}\,\overrightarrow{AC})\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BP}\,\hat{,}\,\overrightarrow{CQ}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Comme BP = CQ ; alors il existe une unique rotation r d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et telle que r (B) = C et r (P) = Q.

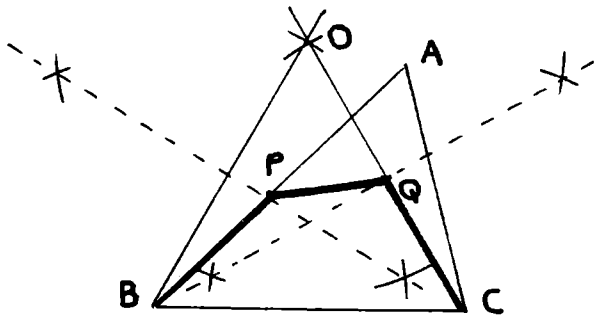
Ainsi on a OB = OC et $(\overrightarrow{OB}\,^{\wedge}\,\overrightarrow{OC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$; alors le triangle OBC est équilatéral et contenu dans le demi-plan de frontière (BC) et contenant A.

2) $r(P) = Q \Leftrightarrow \begin{cases} OP = OQ \\ (\overrightarrow{OP}\,^{\wedge}\,\overrightarrow{OQ}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

Donc OPQ est un triangle équilatéral.

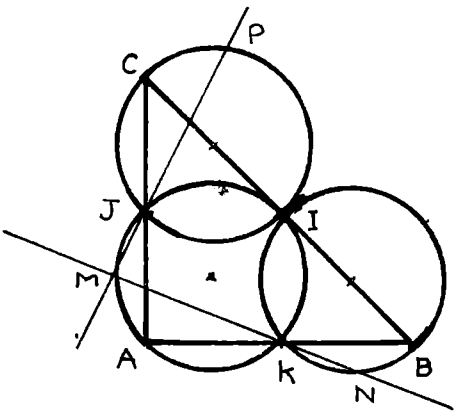
3) Le triangle OPQ étant équilatéral, alors on a : PQ = OP = BP ; donc P est le point d'intersection de [BA) avec la médiatrice de [OB].

De même on a PQ = CQ = OQ ; donc Q est le point d'intersection de [CA] avec la médiatrice de [OC].



Exercice 15

1) a)



b) r (I) = I ; r (A) = B et r (J) = K

Le cercle $\mathcal{C}_A$ est le cercle circonscrit au triangle IAJ, alors r transforme $\mathcal{C}_A$ en le cercle circonscrit au triangle IBK, c'est-à-dire r ($\mathcal{C}_A$) = $\mathcal{C}_B$. On vérifie aussi que r ($\mathcal{C}_C$) = $\mathcal{C}_A$.

2) a) $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) + k\pi$; $k \in Z$ car A, M, I et J sont cocycliques

$(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CI}) + k'\pi$; $k' \in Z$ car P, I, C et J sont cocycliques

D'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{PJ}$ sont colinéaires, de même $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CJ}$ le sont.

D'où $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) + (\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{PJ}) + (\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PI}) + n\pi$; $n \in Z$

$(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) + (\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{CJ}) + (\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CI}) + n'\pi = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}) + n''\pi = \frac{\pi}{2} + n''\pi$; $n'' \in Z$

Donc les droites (MI) et (PI) sont perpendiculaires.

b) r ((IP)) = (IM) et r($\mathcal{C}_C$) = $\mathcal{C}_A$ et r (I) = I ; alors r (P) = M

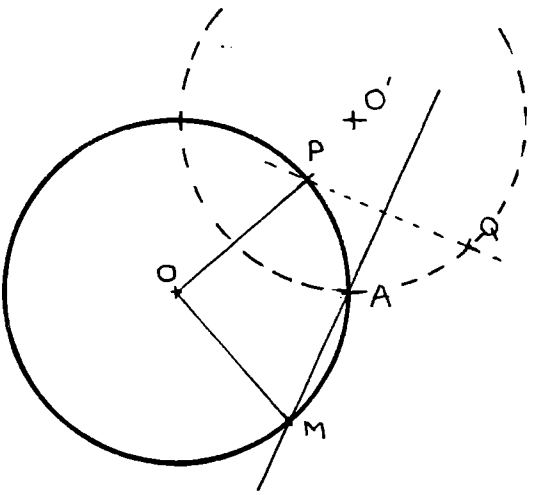
On vérifie que les droites ((MP)) et (MN) sont perpendiculaires, donc r (MP) = (MN) (on rappelle que r (P) = M)

Or M $\in \mathcal{C}_A \cap$ (MP) alors r (M) $\in \mathcal{C}_B \cap$ (MN) c'est à dire r (M) $\in$ { R, N }.

Comme M $\neq$ J alors r (M) = N

ror = S_I donc ror(P) = r(M) = N ; alors I est le milieu du segment [NP]

Exercice 16



$2(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}) \equiv (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi] \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

D'autre part, en utilisant la symétrie orthogonale d'axe (AM) on a :

$(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AQ}) + 2k\pi$; donc $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}) \equiv 2(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM})\ [2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

Comme de plus on a AP = AQ alors on peut affirmer que :

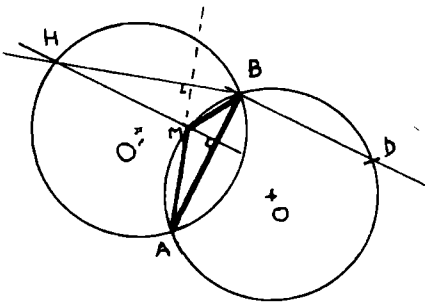
Q = R (A, $\frac{-\pi}{2}$) (P) et P = R (O, $\frac{\pi}{2}$) (M)

M décrit $\mathcal{C} \setminus \{ A \}$ alors P décrira aussi $\mathcal{C} \setminus \{ A \}$

On désigne par O' = R (A, $\frac{-\pi}{2}$) (O)

Si M décrit $\mathcal{C} \setminus \{ A \}$ (donc P décrit C \ { A }) alors Q décrira le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' et de rayon OA privé du point A.

Exercice 23



a) La droite (MH) étant une hauteur de ABM, alors (MH) est perpendiculaire à (AB).

Or le triangle ABD est rectangle en B (ABD est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AD]), donc la droite (BD) est perpendiculaire à (AB).

Ainsi les droites (MH) et (BD) sont parallèles.

b) La droite (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle ABM, alors (BH) est perpendiculaire à (MA).

La droite (MD) est perpendiculaire à (MA) car AMD est un triangle rectangle en M (AMD est inscrit dans $\mathcal{C}$).

Ainsi les droites (BH) et (MD) sont parallèles.

c) (BH) et (DM) sont parallèles et (NH) et (DB) sont parallèles

Alors le quadrilatères BDMH est un parallélogramme.

Donc pour tout point M $\in \mathcal{C} \setminus \{A,B\}$ on a $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{MH}$

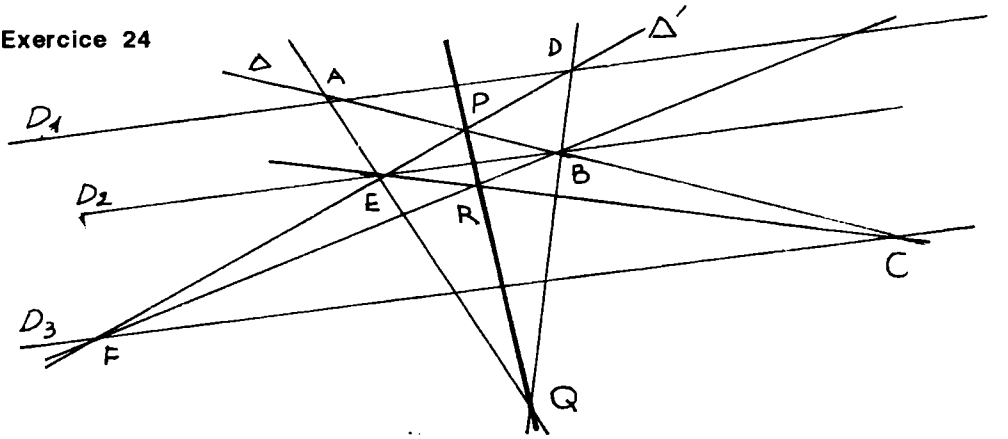
d'où l'existence d'une translation t de vecteur $\overrightarrow{DB}$ telle que :

$$t(M) = H$$

On note $O' = t(O)$

Si M décrit $\mathcal{C} \setminus \{A,B\}$, alors le point H décrira le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' et de rayon $\frac{1}{2}$ AD privé des images de A et de B par t.

Exercice 24



1) a) Comme les droites (AB) et (DE) se rencontrent en P et que les droites (AD) et (EB) sont parallèles ((AD) = D_1 et (EB) = D_2)

Alors il existe une homothétie h_1 de centre P qui transforme D_1 en D_2, en particulier on a

$$h_1 (A) = B \text{ et } h_1 (D) = E$$

Comme I est le milieu de [AD] et J celui de [BE] et h_1 transforme [AD] en [BE] alors h_1 (I) = J.

Ainsi les points I, J et P sont alignés **(P_1)**

b) Les droites (AE) et (BD) se rencontrent en Q et les droites (AD) et (BE) sont parallèles, alors il existe une homothetie h_2 de centre Q transformant D_1 en D_2 et en particulier on a

$$h_2 (A) = E \text{ et } h_2 (D) = B$$

Ainsi h_2 ([AD]) = [EB] alors h_2 (I) = J

Donc les points I, J et Q sont alignés **(P_2)**

2) Il existe une homothétie h_3 de centre P transformant la droite D_2 en D_3 et en particulier on a h_3 (B) = C et h_3 (E) = F.

Comme J est le milieu de [BE] et K celui de [CF] et h_3 ([BE]) = [FC] alors h_3 (J) = K

Ainsi les points J,K et P sont alignés **(P_3)**

On considère l'homothétie h_4 de centre R transformant D_2 en D_3, h_4 transformera alors B en F et E en C.

h_4 ([BE]) = [CF] alors h_4 (J) = K

Alors les points J, K et R sont alignés **(P_4)**

Les conclusions (P_1) et (P_2) confirment alors que les points P, Qet J sont alignés. Les conclusions (P_3) et (P_4) confirment que les points P, R et J sont alignés.

Ainsi les points P, Q et R sont alignés.

PROJECTION DANS L'ESPACE

Exercices

Exercice 1 (N.C)

Soient D et D' deux droites de l'espace ξ sécantes à un plan Q donné.

Soit p la projection sur Q parallèlement à une droite Δ

A quelles conditions sur Δ les projetés de D et de D' sont parallèles.

Exercice 2

On considère un plan (P) et une droite (OA) de (P).

Soit [Ox) une demi-droite de ξ faisant un angle aigu α avec (P) et [Ox') son projeté orthogonal sur (P).

On note θ une mesure de l'angle ([OA) , [Ox'))

1) Déterminer en fonction de α et θ $\cos(\widehat{xOA})$, cotg(β) et tg (β) avec β une mesure de l'angle que fait le plan (xOA) avec (P).

Exercice 3

On considère un tétraèdre régulier ABCD (les droites (AB) et (CD) sont orthogonales) avec AB = a.

Soit (π) un plan parallèle aux droites (AB) et (CD)

Soit M un point du segment [BC].

On désigne par N, P et Q les projetés de M parallèlement à (π) respectivement sur (BD) , (AD) et (AC).

1) Montrer que MNPQ et un rectangle.

2) Evaluer l'aire de MNPQ en fonction de a et de BM.

Exercice 4

Soit un plan P et deux points distincts A et B de ξ .

On désigne par A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur P.

Soit M un point variable de P tel que les droites (MA) et (MB) fassent des angles égaux avec P.

Quel ensemble E peut décrire M ?

Exercice 5 (N.C)

Soient (D) et (D') deux droites sécantes d'un plan (P).

Soit M un point n'appartenant pas à (P).

On désigne par H le projeté orthogonal de M sur P et par I et J ses projetés orthogonaux respectivement sur (D) et sur (D').

Soit O le point de rencontre de (D) et (D').

Montrer que les points O, H, I et J sont cocycliques.

Exercice 6

On donne dans un plan P un triangle ABC rectangle en A.

On désigne par [AH] sa hauteur issue de A.

Soit M un point de la perpendiculaire en H au plan P.

a) Quel est l'angle de la droite (AM) et le plan P.

b) Soit M' le projeté orthogonal de M sur (AC)

Quel est l'angle des plans (AMC) et P.

c) Soit B' un point de ξ tel que [MB' , MC] soit droit et tel que l'image de (MB') par la projection orthgonal sur le plan P soit la droite (AH).

Montrer que (MB') est parallèle au plan P.

d) Soit C' le point de la perpendiculaire en C au plan P tel que (MC') soit parallèle à (BC).

Montrer que [MA , MC'] est droit.

Exercice 7 (N.C)

Soit un plan P et un trapèze rectangle ABCD ($A\hat{B}C = D\hat{A}B = 90°$) n'ayant aucun sommet dans le plan P.

On suppose que le plan Q du trapèze ABCD n'est pas perpendiculaire au plan P.

Soient A', B', C' et D' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C et D sur le plan P.

1) Montrer que A'B'C'D' est un trapèze.

2) Dans quel cas A'B'C'D' est un trapèze rectangle ?

3) On désigne par Δ la droite d'intersection de P et Q et O un point de Δ.

Soient [Ot) une demi-droite du plan P perpendiculaire à Δ et [Oz) une demi-droite de Q perpendiculaire à Δ.

On suppose que tout point M de [Oz) se projette orthogonalement en un point M' de [Ot) tel que MM' = OM

a) Déterminer l'angle des plans P et Q.

b) Une unité de longueur étant choisie. On pose AB = 7 ; AC = 4 et BC = 5

Calculer l'aire du trapèze ABCD.

En déduire l'aire de A'B'C'D'.

Exercice 8

Soit ABC un triangle équilatéral d'un plan (P) (AB = AC = BC = a)

D'un même côté du plan (P), on considère les points A', B' et C' tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont perpendiculaires à (P) et AA' = a ; BB' = 2a et CC' = x

1) Déterminer x pour que le triangle A'B'C' soit rectangle (on distinguera les différents cas du sommet de l'angle droit).

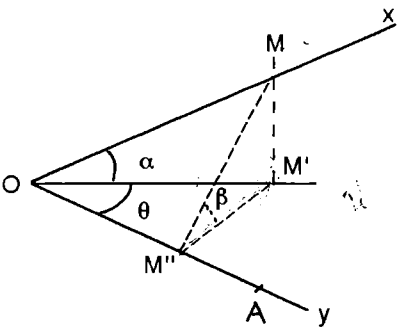
2) A'B'C' étant rectangle en A'.

Déterminer à l'aide de votre calculatrice, une valeur approchée de l'angle α des plans (A'B'C') et (P).

Corrigés

Exercice 2

Soit M un point de [Ox) distinct de O et M' son projeté orthogonal sur P et M'' le projeté orthogonal de M' sur (OA).



Alors on a $OM' = OM \cos \alpha$ et $OM'' = OM' \cos \theta$

Or $OM'' = OM \cos \gamma$ avec $\gamma = (\widehat{xOA})$

D'où $OM \cos \gamma = OM \cos \alpha \cos \theta$

Soit $\boxed{\cos \widehat{xOA} = \cos \alpha \,.\, \cos \theta}$

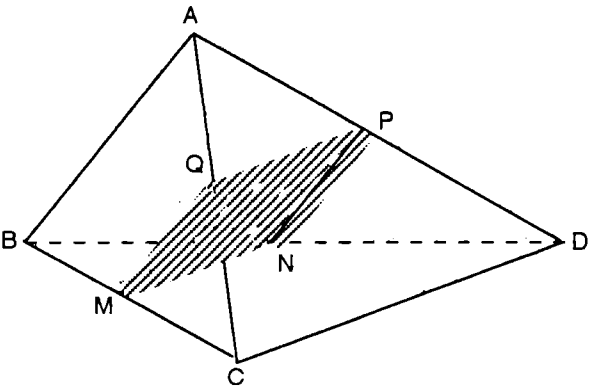
D'une part $M'M'' = OM' \sin \theta = OM \cos \alpha \sin \theta$

d'autre part $M'M'' = MM' \operatorname{cotg} \beta = OM \sin \alpha \operatorname{cotg} \beta$

D'où $\operatorname{cotg} \beta = \dfrac{\cos \alpha \,.\, \sin \theta}{\sin \alpha}$

Soit $\boxed{\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \dfrac{1}{\sin \theta}}$

Exercice 3



Soit (π') le plan passant par M et parallèle à (π).

(π') ∩ (AC) = { Q } ; (π') ∩ (AD) = { P } ; (π') ∩ (BD) = { N }

On a (MN) parallèle à (CD) et (MN) orthogonale à (AB)

(PQ) parallèle à (CD) et (PQ) orthogonale à (AB)

(MQ) parallèle à (AB) et (MQ) orthogonale à (CD)

(PN) parallèle à (AB) et (PN) orthogonale à (CD)

D'où (MN) // (PQ) et (MQ) // (PN) et (MN) ⊥ (MQ) et (PQ) ⊥ (PN)

Donc MNPQ est un rectangle.

2) $S = \frac{1}{2}$ (a - BM) BM

Exercice 4

Les triangles MAA' et MBB' sont rectangles respectivement en A' et B'.

De plus, $\widehat{AMA'} = \widehat{BMB'}$

Alors les triangles MAA' et MBB' sont semblables, d'où :

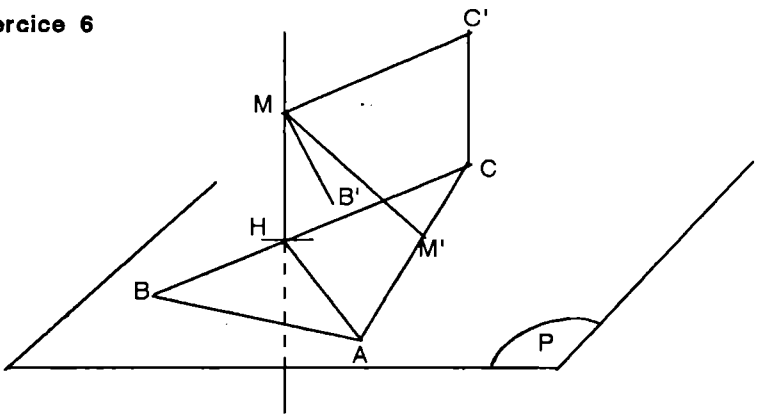
$$\frac{MA'}{MB'} = \frac{MA}{MB} = \frac{AA'}{BB'} = k$$

$$\frac{MA'}{MB'} = k \quad \Leftrightarrow \quad MA^2 - k^2 MB^2 = 0$$

Les points M, A' et B' étant tous dans P, alors si $k \neq 1$; $\frac{MA'}{MB'} = k$ alors M décrit le cercle de diamètre [IJ] où I et J sont les barycentres respectifs { (A', 1) , (B' - k) } et { (A', 1) , (B', k) }

si $k = 1$; $\frac{MA'}{MB'} = 1$ alors M décrit la médiatrice de [A'B'].

Exercice 6



a) Soit p la projection orthogonale sur le plan P.

On a p(A) = A et p(M) = H alors p((AM)) = (AH).

Ainsi l'angle que fait la droite (AM) avec le plan P est $\widehat{MAH}$

b) Les plans P et (AMC) se coupent suivant la droite (AC) et on a (MM') $\perp$ (AC)

alors p(M) = H et p(M') = M' donc p((MM')) = M'H

Ainsi l'angle des deux plans (AMC) et P est $\widehat{MM'H}$

c) On a p(M) = H et p(C) = C alors p((MC)) = HC, de plus p(MB') = (AH) ; donc la projection p transforme le secteur [MB' , MC] en le secteur [HA , HC]

Comme $\widehat{AHC} = \widehat{B'MC} = \frac{\pi}{2}$, alors soit la droite (MB') est parallèle au plan P soit la droite (MC) l'est.

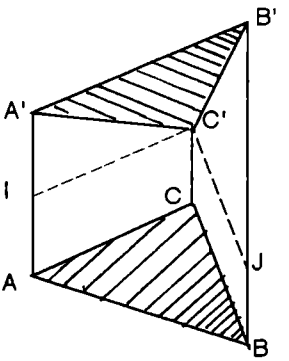
Or (MC) coupe P en C, donc on a néssairement (MB') parallèle à P.

d) p(M) = H et p(A) = A et p(C') = C alors p transforme le secteur [MA , MC'] en [HA , HC].

[HA , HC] étant droit et (MC') parallèle à P alors le secteur [MA , MC'] est droit.

Exercice 8

On désigne par I et J les projetés de C' parallèlement au plan de (ABC) respectivement sur (AA') et (BB').



On vérifie les relations métriques dans A'B'C'

$A'C'^2 = A'I^2 + IC'^2 = (a - x)^2 + a^2$; $B'C'^2 = B'J^2 + JC'^2 = (2a - x)^2 + a^2$

$A'B'^2 = 2a^2$

Le triangle A'B'C' est rectangle en A' $\Leftrightarrow$ $B'C'^2 = A'C'^2 + A'B'^2$

$\Leftrightarrow$ $a^2 + (2a - x)^2 = (a - x)^2 + a^2 + 2a^2$ $\Leftrightarrow$ $a^2 - 4ax = -2ax$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{a}{2}$

Le triangle A'B'C' est rectangle en B' $\Leftrightarrow$ $A'C'^2 = B'A'^2 + B'C'^2$

$\Leftrightarrow$ $5a^2 - 2ax = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{5a}{2}$

Le triangle A'B'C' est rectangle en C' $\Leftrightarrow$ $A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2$

$\Leftrightarrow$ $5a^2 + 2x^2 - 6ax = 0$

L'équation $2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0$ n'admet pas de solutions car $\Delta' = 9a^2 - 10a^2 = -a^2 < 0$

donc le triangle A'B'C' ne peut être rectangle en C'

2) Soit α une mesure de l'angle des plans (P) et (A'B'C')

Soit S' l'aire de A'B'C' et S celle de ABC. Alors on a $S = S' \cos\alpha$

a) On suppose que A'B'C' est un triangle rectangle en A', alors on a :

$S'^2 = \frac{1}{4} A'B'^2 A'C'^2 = \frac{1}{4} (2a^2)(a^2 + (x - a)^2)$ et $x = \frac{a}{2}$

donc $S'^2 = \frac{10\,a^4}{16}$, soit $S' = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$

Comme l'aire S de ABC est $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; alors on a : $\cos\alpha = \frac{S}{S'} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

On en tire $\alpha \approx 56°,78$

VECTEURS DE L'ESPACE

Exercices

Exercice 1 (N.C)

On considère un tétraèdre ABCD.

A tout point M de ξ, on associe repectivement les points M_1 symétrique de M par rapport à A, M_2 symétrique de M_1 par rapport à B, M_3 symétrique de M_2 par rapport à C et M_4 symétrique de M_3 par rapport à D.

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM_4}$ est un vecteur fixe.

Exercice 2

A, B, C et D sont quatre points de ξ et A', B', C' et D' les points tels que :

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \quad ; \quad \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

On désigne par G et G' les centres de gravités des triangles BCD et B'C'D'.

Montrer que les points A, A', G et G' sont alignés.

Exercice 3 (N.C)

Soient A, B et C trois points non alignés de ξ

a) Montrer que pour tout point M de ξ, le vecteur : $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M.

b) soit G le point tel que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exprimer le vecteur $2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}$ en fonction de $\vec{MG}$.

c) En déduire l'ensemble des points M de ξ tels que les vecteurs $2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}$ et $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ soient colinéaires.

Exercice 4

On considère un parallélépipède ABCDEFGH ($\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$).

Soit K le centre de gravité du triangle BDE.

Démontrer que $3\vec{AK} = \vec{AG}$

En déduire que K est le point d'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE).

Exercice 5 (N.C)

On considère dans l'espace ξ un carré ABCD de centre O et un point S n'appartenant pas au plan P du carré ABCD.

Soient A', B', C' et D' les milieux respectifs des segments [SA] , [SB], [SC] et [SD].

1) Montrer que le quadrilatère A'B'C'D' est un carré contenu dans un plan Q parallèle à P.

2) Soit O' le centre de A'B'C'D'.

Montrer que les poinst S, O et O' sont alignés.

Exercice 6 (N.C)

Soit ABCD un tétraèdre de l'espace ξ et k un réel différent de - 1.

Soit M le barycentre de (A, 1) et (B, k) et M' le barycentre de (C, 1) et (D, k).

a) Exprimer le vecteur $\vec{MM'}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.

b) En déduire que la droite (MM') reste parallèle à un plan fixe lorsque k décrit $\mathbb{R} \setminus \{ - 1 \}$.

Exercice 7

ABCD est un tétraèdre et G le point de ξ tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1) Montrer que G est le milieu de [IJ].

2) On désigne par H le centre de gravité du triangle BCD.

Montrer que les points A, G et H sont alignés.

3) Déterminer relativement au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ les coordonnées des points B, C, D, G et H.

Exercice 8 (N.C)

L'ensemble des vecteurs de l'espace est rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les vecteurs : $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$; $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$; $\vec{w} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{X} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 12\vec{k}$; $\vec{Y} = 3\vec{i} - \frac{9}{2}\vec{j} + 9\vec{k}$ et $\vec{Z} = \frac{-1}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}$

Indiquez les couples de vecteurs colinéaires.

Exercice 9 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points A(1, 2, - 4) ; B(3, 1, - 2) et C(4, 4, 3).

Déterminer les coordonnées des points D, E et F tels que les quadrilatères ABCD, ACBE et ACFB soient des parallélogrammes.

Exercice 10 (N.C)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Montrer que les vecteurs : $\vec{X} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{Y} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{Z} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ sont non coplanaires.

Exercice 11

L'ensemble de vecteurs $\mathcal{W}$ de l'espace est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans chaque cas, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{j} + 2\vec{k}$

b) $\vec{u} = \vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

c) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + 4\vec{k}$

d) $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = -6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$

Exercice 12

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$.

a) Montrer que $(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\ ,\ \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\ ,\ \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ est une base de $\mathcal{W}$.

b) Quelles sont les coordonnées de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans cette nouvelle base.

Exercice 13 (N.C)

On considère un parallélépipède ABCDA'B'C'D' ($\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$)

a) Vérifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ est une base de $\mathcal{W}$.

b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{BD'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ relativement à cette base.

Exercice 14

On considère la base $\mathcal{B}$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$. Soient les vecteurs $\vec{u} = \vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

1) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2) Soit le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $2x + y + z \neq 0$

Vérifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

Exercice 15

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points A (1, - 2, 3) ; B (2, 3, 5) et M (x, y, z)

1) Quelles sont les coordonnées des points B et M :

a) Dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

b) Dans le repère $(A, 2\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$.

2) Comment faut-il choisir le point ω de ξ pour que dans le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on ait :

B (0, - 1, - 3).

Exercice 16 (N.C)

Soit $\mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ un repère orthonormé de l'espace ξ .

On définit les points A', B', C' et D' comme centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.

1) Montrer que $\mathcal{R}'(A', 3\overrightarrow{A'B'}, 3\overrightarrow{A'C'}, 3\overrightarrow{A'D'})$ est un repère orthonormé de ξ .

2) Soit un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$

Quelles sont ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$

3) Existe-t-il un point ayant même système de coordonnées dans les deux repères ?

Corrigés

Exercice 2

Comme G et G sont les centres de gravité respectifs des triangles BCD et B'C'D, alors on a : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{G'D'} = \vec{0}$

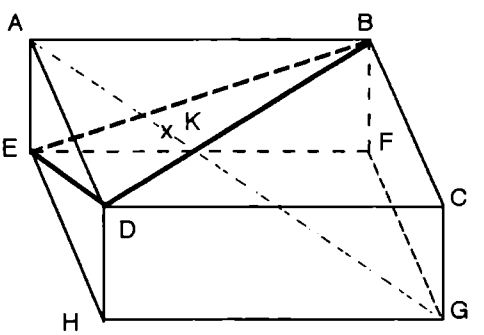
D'où $\overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG}$

D'autre par on a : $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG'} = 2\overrightarrow{AA'}$

c'est à dire $3\overrightarrow{AG'} = 2\overrightarrow{AA'}$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire aux vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG'}$. Donc les points A, A', G et G' sont alingés.

Exercice 4



K est le centre de gravité de BDE $\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{EK} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ étant colinéaires, alors les points A, K et G sont alignés et K est un point du plan (BDE).

Ainsi K est le point de rencontre de la droite (AG) avec le plan (BDE).

Exercice 7

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 2\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}) = \vec{0}$

Ainsi G est le milieu de [IJ]

2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GH} + (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GH}$

Ainsi les points A, G et H sont alignés.

3) B (1, 0, 0) ; C(0, 1, 0) ; D(0, 0, 1)

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

D'où $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $G(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

$\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GH} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$

$H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Exercice 11

a) Il est clair que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$\vec{j} + 2\vec{k} = \alpha(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) + \beta(2\vec{i} - \vec{k}) \Leftrightarrow \alpha\vec{i} + (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{j} + (3\alpha - \beta - 2)\vec{k} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha - \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \beta = -2 \end{cases}$$ impossible

Ainsi les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

d) On remarque que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires en effet : $\vec{v} = 2\vec{u}$.

Donc $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 12

a) On note $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux à deux non colinéaires.

Existe-t-il deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$?

C'est à dire $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-\alpha + \beta)\vec{i} + (\alpha - \beta)\vec{j} + (\alpha + \beta)\vec{k}$

Soit $\begin{cases} 1 = -\alpha + \beta \\ 1 = \alpha - \beta \\ -1 = \alpha + \beta \end{cases}$ ce qui est impossible

Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

c'est à dire $\mathcal{B}'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

b) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{k} \Leftrightarrow \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

$\vec{u} + \vec{w} = 2\vec{j} \Leftrightarrow \vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$

$\vec{v} + \vec{w} = 2\vec{i} \Leftrightarrow \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

Ainsi $\vec{i}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$; $\vec{j}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$; $\vec{k}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

Exercice 14

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on a $0(-1) - 1 \cdot 1 \neq 0$,

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2) Soit $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $2x + y + z \neq 0$

Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors il existe deux réels α et β tels que :

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ c'est à dire :

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = -\alpha - \beta \end{cases}$$

et on a $2x + y + z = 2\beta + (\alpha - \beta) + (-\alpha - \beta) = 0$ ce qui est impossible.

Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires et par suite $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

Exercice 15

On désigne par $\mathcal{R}_1$ le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}_2$ $(A, 2\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ alors $B(1, 5, 2)_{\mathcal{R}_1}$

$\overrightarrow{AM} = (x - 1)\vec{i} + (y + 2)\vec{j} + (z - 3)\vec{k}$ alors $M(x - 1, y + 2, z - 3)_{\mathcal{R}_1}$

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(2\vec{i}) + 5\vec{j} - 2(-\vec{k})$ alors $B(\frac{1}{2}, 5, -2)_{\mathcal{R}_2}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{x - 1}{2}(2\vec{i}) + (y + 2)\vec{j} - (3 - z)\vec{k}$ alors $M(\frac{x - 1}{2}, y + 2, 3 - z)_{\mathcal{R}_2}$

b) On note $\mathcal{R}$ le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On désigne par (α, β, γ) les coordonnées du point ω dans $\mathcal{R}$.

$\overrightarrow{\omega B} = (2 - \alpha)\vec{i} + (3 - \beta)\vec{j} + (5 - \gamma)\vec{k}$

Or $B(0, -1, -3)_{\mathcal{R}}$ c'est à dire $\overrightarrow{\omega B} = -\vec{j} - 3\vec{k}$

D'où $\begin{cases} 2 - \alpha = 0 \\ 3 - \beta = -1 \\ 5 - \gamma = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 8 \end{cases}$

Ainsi les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du point ω sont $(2, 4, 8)$.

DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Exercices

Exercice 1 (N.C)

A tout réel m, on associe le plan P_m défini par : $P_m : m^2x + (2m - 1)\,y + mz - 3 = 0$

1) Déterminer les plans P_m passant par :

a) Le point A(1, 1, 1) b) Le point B(-1, -2, -6) c) Le point C(-1, 0, 1)

2) Démontrer que tous les plans P_m passent par le point I (0, -3, 6).

Exercice 2

Démontrer dans chacun des cas suivants, que tous les plans P_m passent par un point fixe I.

a) $P_m : (m^2 + m)\,x + (2m + 3)\,y + (m^2 - 1)\,z - 4m - 1 = 0$

b) $P_m : (m - 2)\,x + m^2\,y - (2m^2 + 1)\,z = m^2 + m + 1$

c) $P_m : (m^2 + 2m - 1)\,x + (m^2 - m + 1)\,y + (m^2 + 3m - 1)\,z = 2m^2 + 13m - 6$

Exercice 3 (N.C)

A tout réel m, on associe le plan P_m défini par :

$P_m : x + (2m - 1) y + mz - 3 = 0$

1) Définir par un repère les plans P_0 et P_1.

2) Démontrer que P_0 et P_1 se coupent suivant une droite D dont on déterminera un repère.

3) Démontrer que tous les plans P_m contiennent la droite D.

Exercice 4

Démontrer dans chacun des cas suivants que tous les plans P_m contiennent une droite (D) dont on déterminera une représentation paramétrique.

a) $P_m : mx + y + (m - 1) z + 2m + 1 = 0$

b) $P_m : mx + (1 - m) y + (2m + 1) z + 3 - m = 0$

a) $P_m : (2m + 1) x + (m - 1) y - (m + 1) z + 1 = 0$

Exercice 5

Dans l'espace ξ rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les dpoints A(1, 1, -1) et B(2, -1, 3).

1) Former les équations cartésiennes des plans P passant par A et B (ces équations dépendent d'un paramètre réel m).

2) Déterminer m pour que :

a) P passe par O.

b) P soit parallèle au plan dont une équation est : $10x + y - 2z = 0$

c) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit un vecteur de P

Exercice 6 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On désigne par D_a la droite passant par le point Ω (a, a, 0) et de vecteur directeur

$\vec{V}\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel donné.

1) On note I et J les points d'intersection respectifs de D_a avec les plans d'équations respectives : $x = 0$ et $y = 0$

Que peut-on dire de I et J lorsque a décrit IR ?

2) Soit K le point d'intersection de D_a avec le plans d'équation $x = x_0$ où x_0 est un réel donné.

Quel est l'ensemble des points K lorsque a décrit IR ?

Exercice 7 (N.C)

Soient a et b deux réels.

On désigne par $\Delta(a, b)$ la droite passant par $\Omega(a, b, o)$ et de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Donner une représentation paramétrique de $\Delta(a, b)$.

2) Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ unt point donné de l'espace ξ.

Déterminer (a, b) pour que $\Delta(a, b)$ passe par M_0. On note Δ_0 cette droite.

3) Ecrire en fonction de x_0, y_0 et z_0 une équation du plan contenant Δ_0 et passant par O.

Exercice 8

On désigne par (D_m) une droite dont les équations cartésiennes sont :

$$\frac{x - m}{2} = \frac{y - 2m}{3} = \frac{z + m}{5}$$ où m est un paramètre réel

1) Montrer que toutes les droites (D_m) ont une direction fixe dont on donnera le vecteur directeur.

2) Montrer que toutes les droites (D_m) sont contenues dans un plan fixe P dont une équation est : $13x - 7y - z = 0$

3) Calculer les coordonnées du point M_m , intersection (D_m) avec le plan d'équation $z = 0$

Quel est l'ensemble des points M_m lorsque m varie.

Exercice 9 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient deux droites (D) et (D') définies par leurs représentations paramétriques :

$$(D) : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in IR \qquad (D') : \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = 2 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in IR$$

1) Ecrire l'équation cartésienne du plan (P) parallèle à (D) et contenant (D').

2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (P) avec les axes de coordonnées.

Que peut-on remarquer ? Pouvait-on prévoir le résultat ?

3) Utiliser les remarques précédentes pour écrire plus simplement l'équation du plan (P') parallèle à (D') et contenant (D).

Exercice 10

L'espace ξ est rapporté à un repère orthoormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A(1 + m, 0, 0) ; B(0, 2 + m, 0) et (0, 0, 3 - m) où $m \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que pour tout réel m, les points A, B et C définissent un plan (ABC) que l'on déterminera par sa représentation paramétrique.

2) Soit P le plan de ξ dont une équation cartésienne est : $3x + 2y + 3z - 6 = 0$

Déterminer m pour que les plans P et (ABC) se rencontrent suivant une droite (D) que l'on déterminera.

Exercice 11

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient P et Q deux plans d'équations respectives :

P : $2x + y - z + 2 = 0$ et Q : $3x + y + z - 3 = 0$

Soit (D) la droite dont une équation est : $-\frac{x+4}{3} = \frac{y-4}{3} = z - 6$

1) La droite (D) coupe P en A et Q en B.

Déterminer les coordonnées de A et B.

2) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant une droite Δ.

Calculer les coordonnées du point d'intersection C de Δ avec le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

3) Soient le point I(1, -2, 2) et les vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{V}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{W}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Démontrer que $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont non coplanaires.

4) Soit le point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (X, Y, Z) dans le repère $(I, \vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$.

Déterminer x, y et z en fonction de X, Y et Z.

Ecrire une équation du plan P dans le repère $(I, \vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$.

Exercice 12 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les réels x_0, y_0 et z_0 et les points $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $A(x_0, o, o)$; $A'(o, y_0, z_0)$; $B(o, y_0, o)$; $B'(x_0, o, z_0)$; $C(o, o, z_0)$ et $C'(x_0, y_0, o)$ de l'espace ξ.

1) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

2) Ecrire les équations respectives des plans $\big((AA'), (BB')\big)$; $\big((BB'), (CC')\big)$ et $\big((CC'), (AA')\big)$.

3) Sachant que la droite (AA') passe par le point $\Omega(1, 2, 3)$.

a) Déterminer l'ensemble des points A' correspondants.

b) Montrer que M_0 est un point du plan défini par l'axe $(O, \vec{i})$ et le point Ω.

Etablir alors la relation liant x_0 et y_0.

Exercice 13

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne le plan P de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ où $A(2, -1, 0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Soit (D) la droite du plan P d'équation dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$: $2x - 3y + 6 = 0$

Déterminer un repère $(B, \vec{W})$ de la droite (D).

Exercice 14 (N.C)

On donne un plan P passant par un point A (- 1, 0, 3) et de vecteur directeurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$$

1) Soient les points B(- 1, 7, - 5) et C(- 6, 4, - 3).

Montrer que la droite (BC) est contenue dans P.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) relativement au repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ de P.

Corrigés

Exercice 2

a) Soit I(x, y, z) un point de ξ.

$I \in P_m$, pour tout $m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m^2 + m)x + (2m + 3)y + (m^2 - 1)z - 4m - 1 = 0$

pour tout $m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^2(x + z) + m(x + 2y - 4) + 3y - z - 1 = 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \\ 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -3 \\ z = -10 \end{cases}$$

Donc le point I (10, - 3, -10) appartient à tous les plans P_m.

c) On vérifie que I(1, - 2, 3).

Exercice 4

a) Soit M(x, y, z) un point de ξ.

$M \in P_m$, pour tout $m \in \mathbb{R}$: $\Leftrightarrow mx + y + (m - 1)z + 2m + 1 = 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m(x + z + 2) + y - z + 1 = 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Donc tous les plans P_m contiennent la droite D dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -2 - \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Les plants P_m contiennent la droite Δ dont la représentation paramétriques est :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3} \\ z = \frac{-1}{3}\alpha - \frac{2}{3} \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 5

Soit $ax + by + cz + d = 0$ l'équation cartésienne d'un plan P.

Supposons que : $a = 1$

$$A \in P \text{ et } B \in P \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b - c + d = 0 \\ 2 - b + 3c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 1 + d \\ b - 3c = 2 + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{-3}{2} - d \\ b = \frac{-5}{2} - 2d \end{cases}$$

En posant $d = m$, l'équation du P passant par A et B est :

$$x - \left(\frac{5}{2} + 2m\right) y - \left(\frac{3}{2} + m\right) z + m = 0$$

2) a) $O \in P \Leftrightarrow m = 0$ b) $m = \frac{-13}{10}$ c) $m = \frac{-17}{14}$

Exercice 8

$$1)\ D_m : \begin{cases} 3x - 2y = -m \\ 5x - 2z = 7m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}m \\ z = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}m \end{cases}$$

En posant $x = \alpha$ on obtient la représentation paramétrique de D_m.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}m \\ z = \frac{5}{2}\alpha - \frac{7}{2}m \end{cases}$$

Ainsi pour tout $m \in IR$, la droite D_m a une direction fixe définie par le vecteur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Pour tout $M \in D_m$ et pour tout $m \in IR$ on a :

$$13\alpha - 7\left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}m\right) - \left(\frac{5}{2}\alpha - \frac{7}{2}m\right) = \left(13\alpha - \frac{21}{2}\alpha - \frac{5}{2}\alpha\right) - \frac{7}{2}m + \frac{7}{2}m = 0$$

Donc pout tout $m \in IR$, la droite D_m est contenue dans P.

3) Soit M un point de D_m ; $M\left(\alpha, \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}m, \frac{5}{2}\alpha - \frac{7}{2}m\right)$

M est un point du plan $z = 0$ si et seulement si $\frac{5}{2}\alpha - \frac{7}{2}m = 0$

D'où $M_m\left(\frac{7}{5}m ; \frac{13}{5}m, 0\right)$

On pose $X = \frac{7}{5}m$ alors $m = \frac{5}{7}X$ et par suite $\frac{13}{5}m = \frac{13}{7}X$.

D'où $M_m\left(X, \frac{13}{7}X, 0\right)$

L'ensemble des points M_m est la droite contenue dans le plan $z = 0$ définie par sa représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{13}{7}\alpha \\ z = 0 \end{cases} ; \alpha \in IR$$

Exercice 10

1) Pour tout $m \in IR$, on a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-m \\ 2+m \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1-m \\ 0 \\ 3-m \end{pmatrix}$

AB et AC sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{cases} (2+m)(-1-m) = 0 \\ (2+m)(3-m) = 0 \\ (-1-m)(3-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ ou } m = -1 \\ m = -2 \text{ ou } m = 3 \\ m = 3 \text{ ou } m = -1 \end{cases}$

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C définissent un plan dont la représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + m - \alpha(1 + m) - \beta(1 + m) \\ y = \alpha(2 + m) \\ z = \beta(3 - m) \end{cases}$$

2) Les plans P et (ABC) sont sécants si et seulement s'ils ne sont pas parallèles, c'est à dire $\overrightarrow{AB}$ n'est pas un vecteur de P ou AC ne l'est pas.

$$\begin{cases} 3(-1 - m) + 2(2 + m) \neq 0 \\ \text{ou} \\ 3(-1 - m) + 3(3 + m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m \neq 1$$

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; les plans P et (ABC) sont sécants suivant une droite (D_m) définie par :

$$(D_m) : \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + m - \alpha(1 + m) - \beta(1 + m) \\ y = \alpha(2 + m) \\ z = \beta(3 - m) \\ 3x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1 + m) - \alpha(1 + m) - \beta(1 + m) \\ y = \alpha(2 + m) \\ z = \beta(3 - m) \\ \alpha = 3 - 6\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (1 + m) - (1 + m)(3 - 6\beta) - \beta(1 + m) \\ y = (2 + m)(3 - 6\beta) \\ z = (3 - m)\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(1 + m) + 5(1 + m)\beta \\ y = 3(2 + m) - 6(2 + m)\beta \\ z = (3 - m)\beta \end{cases}$$

Exercice 11

1) A(2, -2, 4) et B(-1, 1, 5)

2) Les plans P et Q ne sont pas parallèles, en effet : $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{1}$

Donc P et Q se coupent suivant une droite Δ.

Le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ est défini par son équation cartésienne $x = 0$.

Soit C (x, y, z). C est un point de Δ et du plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ signifie qu'il appartient simultanément à P, Q et $(O, \vec{j}, \vec{k})$; ainsi on a :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ 3x + y + z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{soit } C(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$$

Les vecteurs, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires si et seulement si pour tout réels a, b et c, si on a : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$ alors a = b = c = 0

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 0 \\ 2a - 2c = 0 \\ 4b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = c \\ 2b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

4) $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\overrightarrow{IM} = X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{w} = X(-\vec{i} + 2\vec{j}) + Y(2\vec{i} + 4\vec{k}) + Z(-2\vec{i} + 2\vec{k})$

$= (-X + 2Y)\vec{i} + (2X - 2Z)\vec{j} + (4Y + 2Z)\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ avec $\overrightarrow{OI} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

D'où $\begin{cases} x = 1 - X + 2Y \\ y = -2 + 2X - 2Z \\ z = 2 + 4Y + 2Z \end{cases}$

Soit M(x, y, z) un point de l'espace.

$M \in P \Leftrightarrow 2x + y - z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - X + 2Y) + (-2 + 2X - 2Z) - (2 + 4Y + 2Z) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow Z = \frac{1}{2}$

Donc une équation cartésienne du plan P dans le repère $(I, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est : $Z = \frac{1}{2}$

Exercice 13

Comme l'équation de la droite (D) dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est $2x - 3y + 6 = 0$ alors son vecteur directeur $\vec{W}$ a pour coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ de P.

$$\vec{W}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{c'est à dire } \vec{W} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$$

$$\text{Soit } \vec{W}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Soit M le point du plan P de coordonnées (0, 2) on vérifie que $M \in D$.

$$M(0, 2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On pose (X, Y, Z) les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X - 2 = 4 \\ Y + 1 = -2 \\ Z - 0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 6 \\ Y = -3 \\ Z = 6 \end{cases}$$

Ainsi la droite D est la droite passant par B(6, -3, 6) et de vecteur directeur : $\vec{W}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Exercices

Exercice 1 (N.C)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et tels que :

$||\vec{u}|| = 2\sqrt{3}$; $||\vec{v}|| = 2$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})$; $\vec{v}(2\vec{u}-3\vec{v})$; $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$ et $(2\vec{u}-\vec{v})(3\vec{u}+5\vec{v})$

Exercice 2 (N.C)

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant une base orthonormée de $\mathcal{W}$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

d) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

A(-1, 0, 1) ; B(2, 3, 1) et C(3, -1, 1).

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ ainsi que : cos $\widehat{BAC}$, cos $\widehat{ABC}$ et cos $\widehat{BCA}$.

Exercice 4 (N.C)

Dans l'espace ξ on considère un cube ABCDEFGH de coté a ($a \in \mathbb{R}^*$)

Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HE}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$

Exercice 5

Dans l'espace ξ on considère un cube ABCDEFGH de coté a ($a \in \mathbb{R}^*$)

1) Calculer $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{FG}$

En déduire $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{AG}$

2) Calculer $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FG}$, en déduire $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AG}$

3) En déduire alors $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AG}$

4) Soit O un point de l'espace ξ et X et Y les points définis par $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{AG}$.

Calculer cos $(\widehat{XOY})$ et sin $(\widehat{XOY})$.

Exercice 6

On donne dans l'espace ξ un plan $\mathcal{P}$ une droite Δ contenue dans ce plan, un point A extérieur à P dont le projeté orthogonal H sur $\mathcal{P}$ n'appartient pas à Δ, B et C sont deux points distincts de Δ.

Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH}$.

En déduire que les points A et H ont le même projeté orthogonal sur Δ.

Exercice 7

On donne dans l'espace ξ deux plans P et Q non perpendiculaires et sécants suivant une droite Δ.

Soit A un point de Q n'appartenant pas à Δ, B sont projeté orthogonal sur P et C le projeté orthogonal de B sur Q.

Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

Exercice 8

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

A(1, 1, 1) ; B(2, 3, 5) ; C(3, 4, -1) et D(x, y, 2) où x et y sont deux réels.

1) Vérifier que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

2) On prend dans cette question x = 10 et y = 5

Vérifier que les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires.

Les droites (AC) et (BD) sont elles parallèoles ? sont elles orthogonales ?

3) Déterminer les réels x et y pour que la droite (AD) soit perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (AC).

Exercice 9 (N.C)

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on consicère le plan P dont une équation cartésienne est : $x + 2y - z + 3 = 0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 3 \\ y = -\alpha - 2 \\ z = \alpha + 3 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in IR$$

1) Vérifier que la droite D n'est ni perpendiculaire, ni parallèle au plan P.

2) Déterminer les coordonnées de A, point de rencontre de la droite D et du plan P.

3) a) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et perpendiculaire à la droite D.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan P.

Exercice 10

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A(- 1 ,1 ,1) ; le plan P dont une équation cartésienne est : $2x - y + 3z - 7 = 0$ et la droite Δ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

1) Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et perpendiculaire à P. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Vérifier que les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes en A.

2) Soit Q le plan déterminé par les droites sécantes $\mathcal{D}$ et Δ.

Déterminer une représentation paramétrique du plan Q.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ' intersection des plans P et Q.

Que représente la droite Δ' par rapport à la droite Δ ?

Exercice 11 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on consicère le plan P dont une équation cartésienne est : $x + y - z - 3 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2\alpha - 1 \\ y = -\alpha - 1 \\ z = \alpha + 1 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Vérifier que la droite $\mathcal{D}$ n'est pas perpendiculaire au plan P.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan Q contenant la droite $\mathcal{D}$ et perpendiculaire au plan P.

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ image de la droite $\mathcal{D}$ par la projection orthogonale sur le plan P.

Exercice 12 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On consicère les points :

A(1, 1, 1) et le plan P dont une équation cartésienne est : $-2x + 3y - 5z + 6 = 0$

Déterminer la distance du point A à chacun des plans : $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $(O, \vec{j}, \vec{k})$; $(O, \vec{k}, \vec{i})$ et P.

Exercice 13

1) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires de l'espace ξ. On considère le plan P contenant $\mathcal{D}$ et parallèle à $\mathcal{D}'$ et on désigne par Δ' l'image de $\mathcal{D}'$ par la projection othogonale sur P.

a) Vérifier que les droites $\mathcal{D}'$ et Δ' sont parallèles et que les droites $\mathcal{D}$ et Δ' sont sécantes, soit H leur point de rencontre.

b) On désigne par X la droite passant par H et perpendiculaire à P.

Montrer que X est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

c) Les droites X et $\mathcal{D}'$ se rencontrent en H, la distance HH' est appelée la distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Vérifier que pour tout point M' de $\mathcal{D}'$ on a : HH' = d(M',P).

2) **Application :** L'espace ξ est rapporté à un reprère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -2\alpha + 1 \\ y = \alpha + 1 \\ z = 2\alpha - 1 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 \\ y = -\beta + 1 \\ z = \beta + 1 \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Vérifier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites non coplanaires et déterminer la distance entre ces deux droites.

Exercice 14 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On consicère les points :

A(a, o, o) ; (B(o, b, o) ; C(o, o, c) où a, b et c sont des réels non nuls.

On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC)

1) a) Calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ (on pourra écrire $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}$)

En déduire alors que H est l'orthocentre du traingle ABC

b) La droite (AH) coupe la droite (BC) en A'.

Vérifier que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA'}$. En déduire alors que $BA'^2 = \dfrac{b^4}{b^2+c^2}$

c) On rappelle que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}$ BC.AA'.

En exprimant AA'^2 en fonction de BA^2 et BA'^2, montrer que le carré de l'aire du triangle ABC est égale à la somme des carrés des aires des triangles OAB , OBC et OCA.

2) a) Déterminer une équation cartésienne du plan ABC.

b) Montrer que : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de déterminer les coordonnées du point H.

Corrigés

Exercice 3

On a A(-1, 0, 1) ; B(2, 3, 1) et C(3, -1, 1).

donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$

Les coordonnées étant exprimées dans une repère orthonormé

donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3.4 + 3(-1) + 0.0 = 9$

On a aussi $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{17}$

or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||\ ||\overrightarrow{AC}|| \cdot \cos(\widehat{BAC})$

donc $9 = 3\sqrt{2}\ \sqrt{17}.\cos(\widehat{BAC})$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{3}{\sqrt{34}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$

Exercice 5

1) La droite (HE) est perpendiculaire au plan de la face ABFE, donc les droites (HE) et (AF) sont orthogonales, par suite $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AF} = 0$

$\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FG} = -FG^2 = -a^2$

$\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HE}.(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{HE}.\overrightarrow{FG} = -a^2$

2) ABFE est un carré, donc les diagonales (EB) et (AF) sont perpendiculaires ;

d'où $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{AF} = 0$.

La droite (FG) est perpendiclaire au plan de la face ABFE ; donc les droites (FG) et (EB) sont orthogonales ; donc $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{FG} = 0$.

$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{FG} = 0$

3) $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AG} = (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EB}) \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AG} = -a^2$

4) Les droites (AF) et (FG) sont perpendiculaires donc : $AG^2 = AF^2 + FG^2$

donc $AG^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$

de même $HB^2 = 3a^2$

donc $AG = a\sqrt{3}$ et $HB = a\sqrt{3}$

or $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AG} = HB\ AG \cos(\widehat{XOY})$

d'où $-a^2 = a\sqrt{3}\ a\sqrt{3} \cos(XOY)$

donc $\cos(\widehat{XOY}) = \frac{-1}{3}$

comme $\widehat{XOY}$ est un angle géométrique sa mesure est un élément de $]0, \pi[$

donc $\sin(XOY) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Remarque : Reprendre les questions 3) et 4) en rapportant l'espace ξ au repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

Exercice 6

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HA}$

Comme la droite (HA) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ donc (HA) est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$ en particulier la droite (BC) et donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HA} = 0$

et par suite $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH}$.

Posons A' le projeté orthogonal de A sur Δ et H' celui de H sur Δ.

On a alors $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overline{BC} \cdot \overline{BA'}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overline{BC} \cdot \overline{BH'}$

comme $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH}$ donc $\overline{BC} \cdot \overline{BA'} = \overline{BC} \cdot \overline{BH'}$

donc $\overline{BA'} = \overline{BH'}$ car $\overline{BC} \neq 0$ et par suite $A' = H'$.

Exercice 7

On a ($A \in Q$ et $A \notin \Delta$) donc ($B \in P$ et $B \notin \Delta$) et ($C \in Q$ et $C \notin \Delta$) donc A, B et C sont bien non alignés.

$$\left.\begin{array}{l}(AB) \perp P \\ \\ \Delta \subset P\end{array}\right\} \Rightarrow \text{(AB) orthogonale à } \Delta$$

$$\left.\begin{array}{l}(BC) \perp Q \\ \\ \Delta \subset Q\end{array}\right\} \Rightarrow \text{(BC) orthogonale à } \Delta$$

donc Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) et par suite elle est perpendiculaire à ce plan.

Exercice 8

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 (-2) = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc les droites sécantes (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 0$

donc les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires.

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$$

On a $2 \cdot 2 - 3 \cdot 8 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires ; donc les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 28$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas orthogonaux ; et par suite les droites (AC) et (BD) ne sont pas orthgonales.

3) $\begin{cases} (AD) \perp (AB) \\ (AD) \perp (AC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + 2(y-1) + 4 \cdot 1 = 0 \\ 2(x-1) + 3(y-1) - 2 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 1 \\ -4y - 2 + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = -9 \end{cases}$

Exercice 10

1) $P : 2x - y + 3z - 7 = 0$

donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2\alpha - 1 \\ y = -\alpha + 1 \\ z = 3\alpha + 1 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$1 . (-1) - (-2) . 2 = 3$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont non colinéaires.

Comme $\mathcal{D}$ et Δ passent toutes les deux par A donc $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes en A.

2) $(\vec{n}, \vec{u})$ est un couple de vecteurs directeurs de Q et A appartient à Q ; donc une représentation paramétrique de Q est :

$$\begin{cases} x = 2\alpha + \beta - 1 \\ y = -\alpha - 2\beta + 1 \\ z = 3\alpha + \beta + 1 \end{cases} \quad ; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Soit $M(x, y, z) \in \xi$

$$M \in P \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + \beta - 1 \\ y = -\alpha - 2\beta + 1 \\ z = 3\alpha + \beta + 1 \\ 2x - y + 3z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha + 1 \\ x = 0 \\ y = 3\alpha - 1 \\ z = \alpha + 2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ' est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3\alpha - 1 \\ z = \alpha + 2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour tout point M de Δ, la droite passant par M et perpendiculaire à P est contenue dans Q. Comme l'image de la droite Δ par la projection orthgonale sur P est une droite (d'après le cours puisque Δ n'est pas perpendiculaire à P) ; donc Δ' est l'image de Δ par cette projection.

Exercice 13

1) a) Soit A un point de la droite $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ la droite passant par A et perpendiculaire au plan P.

$\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont perpendiculaires , soit Q le plan déterminé par ces deux droites on a alors Δ' = P ∩ Q.

Si $M \in \Delta' \cap \mathcal{D}'$ alors $M \in P \cap \mathcal{D}'$ ce qui est impossible car la droite $\mathcal{D}'$ est strictement parallèle au plan P, donc $\Delta' \cap \mathcal{D}' = \varnothing$.

Δ' et $\mathcal{D}'$ étant coplanaires donc Δ' et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

Si Δ' était parallèle à $\mathcal{D}$ alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ seraient parallèles ce qui est impossible.

Donc $\mathcal{D}$ et Δ' sont non parallèles, étant coplanaires elle sont donc sécantes.

b) X est perpendiculaire à P donc X est orthogonale à toute droite de P. Comme $\mathcal{D}$ est incluse dans P et X passe par un point de $\mathcal{D}$ (qui est H) donc X et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.

X passe par H qui est un point de Q et elle est perpendiculaire au plan P donc X est incluse dans Q.

X perpendiculaire à P donc X orthogonale à Δ'.

ainsi on a :
$$\begin{cases} \Delta' \subset Q \\ \mathcal{D}' \subset Q \\ \Delta' \parallel \mathcal{D}' \\ X \perp \Delta' \end{cases}$$
donc $\mathcal{D}'$ perpendiculaire à X

c) Pour tout point M' de $\mathcal{D}'$, son projeté orthgonal K' sur P appartient à Δ'.

ainsi $\begin{cases} \Delta' \,//\, \mathcal{D}' \\ (M'\,K') \,//\, (HH') \\ (HH') \perp \Delta' \end{cases}$

donc H' M' K' H est un rectangle donc H' H = M'K'

or M'K' = d(M', P)

donc pour tout point M' de $\mathcal{D}'$ on a : HH' = d(M', P)

2) Soit $M(x, y, z) \in \xi$

$$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\alpha = 1 & (1) \\ y = 1 + \alpha = 1 - \beta & (2) \\ z = -1 + 2\alpha = 1 + \beta & (3) \end{cases} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

D'après **(1)** : $\alpha = 0$ donc **(2)** donne $\beta = 0$ et par suite **(3)** : $-1 = 1$ impossible

donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$

D'autre part $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$\vec{u'} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$

$-2(-1) - 1 \cdot 0 = 2$, donc u et u' sont non colinéaires, donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, comme elles sont disjointes elles sont non coplanaires.

Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 1 + \alpha - \beta \\ z = -1 + 2\alpha + \beta \end{cases} \quad ; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1-x}{2} \\ y = 1 + \dfrac{1-x}{2} - \beta \\ z = -1 + 2\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1-x}{2} \\ \beta = \dfrac{3-x-2y}{2} \\ z = -x + \dfrac{3-x-2y}{2} \end{cases}$$

Donc une équation cartésienne de P est : $3x + 2y + 2z - 3 = 0$

La distance cherchée est : $d = d(M', P)$ où M' est un point queonque de $\mathcal{D}'$.

Donc $d = \dfrac{|3 + 2 - 2\beta + 2 + 2\beta - 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

LA SPHERE

Exercices

Exercice 1 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer une équation cartésienne de la sphère S dans chacun des cas suivants :

1) S de centre I (3, 0, -1) et de rayon $\sqrt{5}$

2) S de centre I (1, 1, -1) et de rayon 2

3) S de diamètre [AB] avec A (-1, 2, 1) et B (1, 0, 3)

4) S de centre I (1, -1, 2) et passe par O.

Exercice 2 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble E.

1) E : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - z + 2 = 0$

2) E : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 1 = 0$

3) E : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

4) E : $x^2 + y^2 + z^2 - x - 6y - 2x - 2z + 11 = 0$

5) E : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 3 = 0$

Exercice 3

l'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) S est la sphère de centre I (1, -1, 3) et de rayon $\sqrt{6}$.

Vérifier que le point A(2, -2, 1) appartient à S et déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en A.

2) Soit (Γ) l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$$

Vérifier que (Γ) est une sphère dont on déterminera le rayon et les coordonnées du centre.

Vérifier aussi que le point B (-1, 1, 1) appartient à la sphère (Γ) et déterminer une équation cartésienne du plan tangent à (Γ) en B.

Exercice 4

L'espace ξ est rapporté à un reprère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P : $x + 2y + z - 5 = 0$ et S : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

1) Vérifier que S est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon.

2) Montrer que la sphère S et le plan P sont sécants suivant un cercle que l'on déterminera.

3) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans parallèles à P et tangents à S.

Exercice 5

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère S dont une équation cartésienne est :

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 14$ et les droites D, D' et D" définies par :

$$D : \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 5 \\ z = \alpha + 1 \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad D' : \begin{cases} x = \beta + 2 \\ y = 2\beta - 3 \\ z = 4\beta - 2 \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad D'' : \begin{cases} x = \gamma - 2 \\ y = 2\gamma - 1 \\ z = \gamma + 5 \\ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Déterminer les intersections de la sphère S avec chacune des droites D, D' et D".

Exercice 6 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère S de centre Ω (1, 2, 0) et de rayon $\sqrt{6}$ et le plan P dont une équation cartésienne est : $x + y - 2z - 6 = 0$

1) Montrer que P et S sont sécants

2) Soit A (3, 1, -1).

a) Vérifier que A appartient à P et à S

b) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en A.

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite incluse dans P et tangente à S en A.

Exercice 7 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(3, 2, -1) et B(4, 0, 4) et le plan P dont une équation cartésienne est : $2x + y - 3z - 11 = 0$

Vérifier que A appartient à P et déterminer une équation cartésienne de la sphère tangente à P en A et passant par B.

Exercice 8

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'ensemble S des points de coordonnées (x, y, z) vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 2 = 0.$$

1) Vérifier que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Déterminer l'intersection de S avec chacun des plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $(O, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O, \vec{k}, \vec{i})$.

3) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 7 = 0$

a) Montrer que le plan P et la sphère sont sécants suivant un cercle C que l'on caractérisera.

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère coupée par le plan P suivant le cercle C et passant par le point A(4, 3, 5).

Exercice 9 (N.C)

1) Dans l'espace ξ, on considère deux points distincts A et B et I le milieu du segment [AB].

a) Montrer que pour tout point M de l'espace ξ on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB}.\overline{IH}$ où H désigne le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

b) Déterminer les ensembles suivants :

$E = \{ M, M \in \xi \text{ et } MA^2 + MB^2 = \frac{5}{4} AB^2 \}$

$E' = \{ M, M \in \xi \text{ et } MA^2 - MB^2 = AB \}$

2) On suppose l'espace ξ rapporté à un reprère orthonormé et on donne A(1, 2, 3) et B (-1, 0, 1).

Déterminer une équation cartésienne de chacun des ensembles E et E' définis au 1/b) .

Retrouver alors les résultats établis à cette équation.

Exercice 10

Dans un plan (P) de l'espace ξ on considère un triangle ABC rectangle en B.

Soit S un point de la perpendiculaire à (P) issue de A.

H et K désignent respectivement les pieds des hauteurs issues de A des triangles ABS et ACS.

1) a) Montrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ABS).

b) Montrer que les droites (HA) et (HC) sont perpendiculaires.

2) Montrer que les cinq points A, B, C, H, K appartiennent à une même sphère que l'on caractérisera.

Exercice 11

On donne dans l'espace ξ un segment [AB] et un plan (P) perpendiculaire à ce segment en I (I est distinct de A).

Soit (S) la sphère de diamètre [AB]. Une droite passant par A coupe (P) en R et recoupe (S) en Q.

Etablir que : $\overline{AR} \cdot \overline{AQ} = \overline{AI} \cdot \overline{AB}$, en exprimant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Exercice 12 (N.C)

1) Quel est l'ensemble des centres des sphères qui passent par un point donné A de l'espace ξ et de rayon donné R ($R \in \mathbb{R}^*_+$).

2) Quel est l'ensemble des centres des sphères qui passent par deux points A et B donnés de l'espace.

3) Quel est l'ensemble des centres des sphères tangentes à un plan P donné de l'espace en un point donné A de P.

Exercice 13

Dans l'espace ξ on considère deux points distincts I et A et le plan P passant par A et perpendiculaire à la droite (IA).

On pose IA = R

1) Montrer que pour tout point M de P on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = MA^2$

Déterminer l'ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = R^2$

2) Montrer que pour tout point M de l'espace ξ on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = MJ^2 - JA^2$ où J est le milieu du segment [IA].

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace ξ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = R^2$

En déduire alors (sans utiliser la première question) l'ensemble des points M du plan P tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = R^2$

Exercice 14

Une droite Δ varie dans un plan P en passant par un point fixe O. A est un point fixe de l'espace ξ n'appartenant pas à P.

Sur quelle ligne se déplace le projeté orthogonal M de A sur Δ ?

Exercice 15 (N.C)

Soient A et B deux points distincts de l'espace ξ, on note E (respectivement E').

L'ensemble des points M de ξ tels que $\frac{MA}{MB} = 2$

(respectivement tels que : $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$)

Montrer que E et E' sont deux sphères de même rayon.

Exercice 16 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On désigne par S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Soit P_m le plan d'équation $x + z + m = 0$ où m est un paramètre réel.

Etudier, suivant les valeurs de m, les positons relatives du plan P_m et de la sphère S.

3) a) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P_0 est un cercle $(\mathcal{C})$ dont on calculera le rayon et les coordonnées du centre.

b) Soit $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} - \vec{k})$.

Montrer que $R' = (O, \vec{e}, \vec{j})$ est un repère orthonormé de P_0

c) Soit M un point de P_0 de coordonnées (x, y, z) relativement au repère R.

En désignant par (X, Y) les coordonnées du point M relativement au repère R', calculer X et Y en fonction de x et y.

d) En déduire une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ dans le repère R'.

Exercice 17 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point $\omega(0, 0, 1)$ et le plan P dont une équation cartésienne est :

$2ax + 2by + (1 - a^2 - b^2) z + 2 (a^2 + b^2) = 0$ où a et b sont deux réels quelconques.

1) a) Calculer $d(\omega, P)$

b) Montrer que lorsque a et b décrivent IR, le plan P reste tangent à une sphère fixe S dont on déterminera une équation cartésienne.

2) (a.b) désigne maintenant les coordonnées d'un point A du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer une représentation paramétrique (relativmeent au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) de la droite Δ passant par le point A' symétrique de A par rapport au point O et perpendiculaire au plan P.

b) Déterminer l'ensemble des points A pour lesquels la droite Δ coupe la sphère S en deux points distincts.

Exercice 18

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'ensemble S dont une équation cartésienne est :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ et le plan P dont une équation cartésienne est $x + z - 1 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives (2, 0, -1) et B (0, 0, -1).

I) 1) Vérifier que S est une sphère

Déterminer son centre Ω et son rayon R.

Vérifier que A et B sont deux points diamétralement opposés de la sphère S.

2) Démontrer que le plan P et la sphère S sont sécants suivant un cercle C dont on précisera le centre et le rayon.

II) Dans toute cette partie, t désigne un élément de l'intervalle [0, π] et M le point de coordonnées $(\cos^2 t + 1, \sqrt{2}. \cos t . \sin t, -\cos^2 t)$.

1) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

En déduire que le point M appartient à la sphère S.

b) Montrer que le point M appartient au cercle C.

2) Déterminer les positions du point M pour lesquelles OM^2 est un extremum.

3) On suppose de plus que : $t \neq \frac{\pi}{2}$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à la sphère s au point M.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ_t tangente au cercle C au point M et contenue dans P.

c) Soit H le plan déterminé par le point Ω et les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On suppose que le plan H est orienté de sorte que le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé direct.

Déterminer les coordonnées (X, Y) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ du point d'intersection de la droite Δ_t et du plan H.

Déterminer l'ensemble de ces points lorsque t décrit $[0, \pi] \setminus \{ \frac{\pi}{2} \}$.

Donner une interprétation géométrique du réel t.

Corrigés

Exercice 3

1) On a I (1, -1, 3) et A (2, -2, 1)

donc $IA = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{6}$

donc A appartient à la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{6}$ c'est à dire S.

Désignons par P le plan tangent à S en A

P est le plan passant par A et perpendiculaire à (IA)

Soit $M(x, y, z) \in \xi$ on a $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \\ z-1 \end{pmatrix}$

$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ orthogonal à $\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (x-2) - (y+2) - 2(z-1) = 0$

Une équation cartésienne du plan P est : $x - y - 2z - 2 = 0$

2) Soit $M(x, y, z) \in E$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-z)^2 + (z-1)^2 - 1 - 4 - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$

donc (Γ) est la sphère de centre J (-1, 2, 1) et de rayon 1.

$(-1)^2 + 1^2 + 1^2 - 2 - 4 - 2 + 5 = 8 - 8 = 0$ donc $B \in (\Gamma)$

Désignons par Q le plan tangent à (Γ) en B.

Q est le plan passant par B et perpendiculaire à (JB)

Soit $M(x, y, z) \in \xi$; on a $\overrightarrow{JB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$

$M \in Q \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{BM}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{JB}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow \quad o(x + 1) - (y - 1) + o(z - 1) = 0$

Une équation cartésienne de Q : $y = 1$

Exercice 4

1) S est la sphère de centra Ω (1, -1, 0) et de rayon 3

2) $d(\Omega, P) = \dfrac{|1 - 2 + 0 - 5|}{\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

Comme $\sqrt{6} < 3$ donc P et S sont sécants suivant un cercle C du plan P. Le rayon de C est $r = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}$ et le centre de C est le point H projeté orthogonal de Ω sur P c'est à dire le point d'intersection du plan P et de la droite Δ issue de Ω est perpendiculaire à P.

on a $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ. Comme Δ passe par Ω, donc sa représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 2\alpha - 1 \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Comme H appartient à Δ et à P donc la valeur du paramètre α correspondant à H vérifie.

$\alpha + 1 + 2(2\alpha - 1) + \alpha - 5 = 0$ donc $\alpha = 1$ d'où H(2, 1, 1)

Conclusion : $P \cap S$ est le cercle de P de centre H (2, 1, 1) et de rayon $\sqrt{3}$.

3) Cherchons les plans Q parallèles à P et tangents à S.

La condition "Q est parallèle à P" se traduit par une équation cartésienne de Q est :

$x + 2y + z + d = 0$ ou d est une constante réelle.

La condition "Q est tangent à S" se traduit par $d(\Omega, Q) = 3$

$$d(\Omega, Q) = 3 \Leftrightarrow \frac{|1 - 2 + 0 + d|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = 3 \Leftrightarrow |-1 + d| = 3\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow -1 + d = 3\sqrt{6} \text{ ou } -1 + d = -3\sqrt{6} \Leftrightarrow d = 1 + 3\sqrt{6} \text{ ou } d = 1 - 3\sqrt{6}.$$

Conclusion : Il existe deux plans tangents à S et parallèles à P, ce sont les plans dont les équations cartésiennes sont :

$x + 2y + z + 1 + 3\sqrt{6} = 0$ et $x + 2y + z + 1 - 3\sqrt{6} = 0$

Exercice 5

1) D et S sont sécants et on a : $D \cap S = \{A(3, 5, 2) ; B(-1, 5, 0)\}$

2) D' et S sont tangents et on a : $D' \cap S = \{E(3, -1, 2)\}$

3) D" et S sont disjoints

Exercice 8

1) Soit $M(x, y, z) \in \xi$

$$M \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$$

Donc S est la sphère de centre I (2, 1, 1) et de rayon 2.

2) Notons P_1 le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$; P_2 le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$; P_3 le plan $(O, \vec{k}, \vec{i})$

Soit $M(x, y, z) \in \xi$

$$\bullet\ M \in P_1 \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3 \end{cases}$$

Donc $P_1 \cap S$ est le cercle C_1 de P_1 de centre I_1 (2, 1, 0) et le rayon $\sqrt{3}$.

On vérifie de même que P_2 et S sont tangents au point A_2 (0, 1, 1).

P_3 et s se coupent suivant le cercle C_3 de centre I_3 (2, 0, 1) et de rayon $\sqrt{3}$.

3) a) On vérifie que P et S se rencontrent suivant le cercle de centre H(3, 2, 2) et de rayon 1.

b) Soit S' une sphère passant par A et qui est coupée par P suivant C, notons J son centre et R' son rayon. On a alors : $J \in \Delta$ et JA = R'

or $1 = \sqrt{R'^2 - JH^2}$ (1 le rayon de C et d(J, P) = JH) ; donc $R^2 = 1 + JH^2$.

Les coordonnées de J sont de la forme $(\alpha + 2 , \alpha + 1, \alpha + 1)$ avec α un réel .

Donc $(\alpha - 2)^2 + (\alpha - 2)^2 + (\alpha - 4)^2 = 1 + \dfrac{|\alpha + 2 + \alpha + 1 + \alpha + 1 - 7|^2}{3}$

donc $3\alpha^2 - 16\alpha + 24 = 1 + 3(\alpha^2 - 2\alpha + 1)$

D'où $10\alpha = 20$ et par suite $\alpha = 2$ donc J (4, 3, 3) et R' = 2

Par construction, la sphère de centre J(4, 3, 3) et de rayon 2, est coupée par P suivant C et passe par A.

Une équation cartésienne de cette sphère est $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4$ ou encore $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 6z + 30 = 0$

Exercice 10

1) a) On a : (AS) est perpendiculaire au plan P donc (AS) est orthogonale à (BC).

Or (AB) est perpendiculaire à (BC) et (AS) et (AB) sont deux droites sécantes.

Donc la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ABS)

b) On a $\overrightarrow{HA} . \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} . (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{HA} . \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA} . \overrightarrow{BC}$

Or les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux car H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABS donc $\overrightarrow{HA} . \overrightarrow{HB} = 0$

On a aussi (BC) orthogonale au plan ABS et comme la droite (AH) est incluse dans ce plan donc les droites (AH) et (BC) sont orthogonales, par suite $\overrightarrow{HA} . \overrightarrow{BC} = 0$

Ainsi $\overrightarrow{HA} . \overrightarrow{HC} = 0$; donc les droites (HA) et (HC) sont perpendiculaires.

2) On a (BA) et (BC) perpendiculaires par hypothèse.

(KA) et (KC) perpendiculaires car K est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ACS.

(HA) et (HC) perpendiculaires d'après 1)

Donc les points B, K et H appartiennent à la sphère de diamètre [AC].

Ainsi les cinq points ABCHK appartiennent à la sphère de centre le milieu du segment [AC] et de rayon $\frac{AC}{2}$

Exercice 11

On a $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AR} \neq \vec{0}$

$Q \in S$ et [AB] diamètre de S $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{QA}$ et $\overrightarrow{QB}$ sont orthogonaux

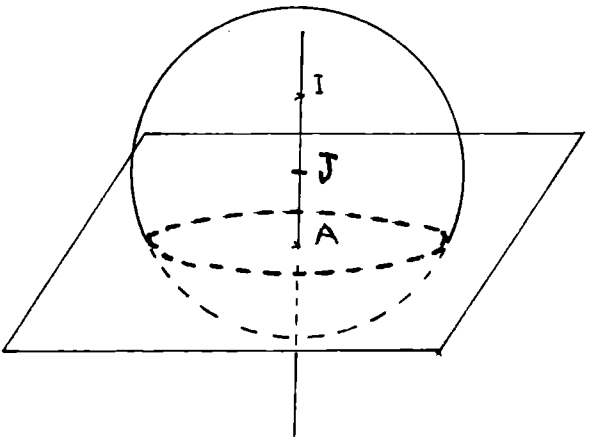
Par suite Q est le projeté orthogonal de B sur (QA) ((QA) = (RA))

On a évidemment A est le projeté orthogonal de A sur (RA) d'où $\overrightarrow{AR} . \overrightarrow{AB} = \overline{AR} . \overline{AQ}$

Le plan (P) est perpendiculaire à (AB) et contient R et comme (P) coupe (AB) en I donc I est le projeté orthogonal de R sur (AB), d'où $\overrightarrow{AR} . \overrightarrow{AB} = \overline{AI} . \overline{AB}$

Par suite $\overline{AR} . \overline{AQ} = \overline{AI} . \overline{AB}$.

Exercice 13



1) Soit $M \in P$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AI} = MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AI}$

Comme M et A appartiennent à P et (AI) perpendiculaire à P donc les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$ et par suite $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = MA^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in P \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in P \\ MA^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in P \\ AM = R \end{cases}$$

Ainsi M décrit le cercle de P de centre A et de rayon R.

2) soit J le milieu du segment [IA]

Pour tout $M \in \xi$ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) \cdot (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JI})$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) \cdot (\overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{JA})$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = MJ^2 + JA^2$

Comme J est le milieu de [AI] donc $JA^2 = \frac{1}{4} R^2$

Soit $M \in \xi$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = R^2 \Leftrightarrow MJ^2 - \frac{1}{4} R^2 = R^2 \Leftrightarrow MJ^2 = \frac{5}{4} R^2 \Leftrightarrow JM = \frac{\sqrt{5}}{2} R$

Ainsi M décrit la sphrère S de centre J et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2} R$.

L'ensemble des points du plan P tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = R^2$ est donc l'intersection de la sphère S et du plan P qui est le cercle du plan P de centre le projeté orthogonal de J sur P et de rayon $R' = \sqrt{\frac{5}{4} R^2 - d^2}$ avec d = d (J , P) .

Or le projeté orthogonal de J sur P est le point A et donc $d = JA = \frac{1}{2} R$

donc $R' = \sqrt{\frac{5}{4} R^2 - \frac{1}{2} R^2} = R$

Ainsi l'ensemble cherché est le cercle de P de centre A et de rayon R.

Exercice 14

Si A appartient à la droite passant par O et perpendiculaire à P alors M = O

Si A n'appartient pas à la droite précédente alors on a $M \neq A$ et $M \neq O$ et (MA) est perpendiculaire à (MO).

Donc M appartient à la sphère S de diamètre [AO] de plus M apparitent à P donc M se déplace sur le cercle section de la sphère S et du plan P.

Exercice 18

I) 1) S est la sphère de centre $\Omega(1, 0, -1)$ et de rayon R = 1

* Les coordonnées de A et B vérifient l'équation donnée.

* Le milieu de [AB] est $\Omega (1, 0, - 1)$

Donc A et B sont deux points de S diamétralement opposés.

2) $d(\Omega, P) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc P et S sont sécants

$P \cap S = C$ avec C le cercle de P de centre $\Omega' (\frac{3}{2} , 0 , \frac{- 1}{2})$ et de rayon $R' = \frac{1}{\sqrt{2}}$

II) 1) a) On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 1-\cos^2 t \\ -\sqrt{2}.\cos t.\sin t \\ -1+\cos^2 t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} -1-\cos^2 t \\ -\sqrt{2}.\cos t.\sin t \\ -1+\cos^2 t \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \cos^4 t - 1 + 2\cos^2 t.\sin^2 t + \cos^4 t - 2\cos^2 t + 1$

$= 2\cos^4 t + 2\cos^2 t.\sin^2 t - 2\cos^2 t$

$= 2\cos^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t - 1) = 0$

Comme [AB] est un diamètre de S donc M appartient à S.

b) On a pour tout $t \in [0, \pi]$; $(1+\cos^2 t) + (-\cos^2 t) - 1 = 1 + \cos^2 t - \cos^2 t - 1 = 0$

donc les coordonnées de M vérifient l'équation de P donc M appartient à P, comme M appartient à S, donc M appartient à C.

2) Pout tout $t \in [0, \pi]$, posons $\varphi(t) = OM^2$

$\varphi(t) = (\cos^2 t + 1)^2 + (\sqrt{2}\cos t \sin t)^2 + (\cos^2 t)^2 = 2\cos^4 t + 2\cos^2 t.\sin^2 t + 2\cos^2 t + 1$

$= 2\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t + 1) + 1$

Pour tout $t \in [0, \pi]$ $\varphi(t) = 4\cos^2 t + 1$

La fonction φ est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $t \in [0, \pi]$ on a $\varphi'(t) = -8 \sin t \cos t$

d'où le tableau de variation de φ.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\varphi'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$\varphi(t)$	5	↘	1	↗	5

Les réels 0 et π définissent le même point de coordonnées (2, 0, -1) c'est à dire A.

Le réel $\frac{\pi}{2}$ définit le point E (1, 0,0)

Conclusion : OM^2 est minimum lorsque M est au point E de P

OM^2 est maximale lorsque M est au point A de P

3) a) Le plan Q tangent à S en M est le plan passant par M et perpendiculaire à la droite (ΩM)

donc le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} \cos^2 t \\ -\sqrt{2}\,.\cos t\,.\sin t \\ -\cos^2 t + 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q

donc une équation cartésienne de Q est de la forme

$(\cos^2 t)\,x + (\sqrt{2}\,.\cos t\,.\sin t)\,y + (1 - \cos^2 t)\,z + d = 0$

Comme M appartient à Q

donc $\cos^2 t\ (\cos^2 t + 1) + (\sqrt{2}\,.\cos t\,.\sin t)^2 - (1 - \cos^2 t)\cos^2 t + d = 0$

donc $\cos^4 t + \cos^2 t + 2\cos^2 t \sin^2 t - \cos^2 t + \cos^4 t + d = 0$

$2\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) + d = 0$ d'où $d = -2\cos^2 t$

Ainsi une équation cartésienne de Q est :

$(\cos^2 t)\,x + (\sqrt{2}\,.\cos t\,.\sin t)\,y + (1 - \cos^2 t)\,z - 2\cos^2 t = 0$

HOMOTHETIES ET TRANSLATIONS DE L'ESPACE

Exercices

Exercice 1 (N.C)

On considère dans l'espace ξ un tétraèdre ABCD.

1) Montrer qu'il existe un unique point G de ξ tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2) Soit $f : \xi \longrightarrow \xi$

$$M \longrightarrow M' / \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$$

Montrer que f est une homothétie de centre G. Préciser son rapport.

3) Déterminer l'ensemble des points M de ξ dont l'image M' est un point de la droite (BD).

Exercice 2

On considère dans l'espace ξ un tétraèdre ABCD et k un réel donné.

1) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ est indépendant de M

2) Montrer que si $k \neq -2$ alors il existe un unique point G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

3) Montrer que si $k \neq -2$ alors pour tout point M de ξ on a :

$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{MD} = (k + 2)\overrightarrow{MG}$$

4) Soit $f : \xi \longrightarrow \xi$

$$M \longmapsto M' / \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{MD}$$

a) Montrer que si $k = -2$ alors f est une translation.

b) Montrer que si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ alors f est un homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Exercice 3

Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan sécants de l'espace ξ.

1) $\vec{u}$ étant un vecteur donné, montrer qu'il existe un unique point M de $\mathcal{D}$ et un unique point M' de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

2) Soit A un point n'appartenant ni à $\mathcal{D}$ ni à $\mathcal{P}$.

Montrer qu'il existe un unique point N de $\mathcal{D}$ et un unique point N' de $\mathcal{P}$ tels que :

$2\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{AN'} = \vec{0}$

Exercice 4

Soient Ω et Ω' deux points de ξ et k et k' deux réels non nuls tels que $k \cdot k' \neq 1$.

On désigne par h et h' les homothéties de centres respectifs Ω et Ω' et de rapports respectifs k et k'.

Montrer que h'oh est une homothétie de rapport k.k'.

2) Soit ABC un triangle de ξ et G son centre de gravité.

Soient O un point de ξ et A', B', C' les points de ξ définis par :

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

a) Montrer que les segments [AA'] ; [BB'] et [CC'] ont même milieu I puis exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$.

b) Soient A_1 ; B_1 et C_1 les milieux respectifs de [BC] , [AC] et [AB]

Montrer qu'il existe une homothétie et une seule f de centre G qui transforme A en A_1 ; B en B_1 et C en C_1. Préciser son rapport.

c) Montrer qu'il existe une homothétie et une seule g de centre O qui transforme A_1 en A' ; B_1 en B' et C_1 en C'. Préciser son rapport.

d) Déterminer la nature de gof

Exercice 5

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\Omega(4, 5, 7)$

1) Déterminer une expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u}$ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport 3.

2) Soit le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est : $x + 3y + z - 1 = 0$

et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 4 + 3\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites :

$\mathcal{D}' = t(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}'' = h(\mathcal{D})$

b) Donner une équation cartésienne de chacun des plans $\mathcal{P}' = t(\mathcal{P})$ et $\mathcal{P}'' = h(\mathcal{P})$.

3) Soit $(S) = \{ M(x, y, z) \in \xi / x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 4 = 0 \}$

Montrer que (S) est une sphère puis déterminer h (S) et t (S).

Exercice 6 (N.C)

L'espace ξ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; $\Omega(1, 2, 5)$; $\Omega'(4, 5, 7)$

Soient t la translation de vecteur $\vec{u}$.

h l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.

h' l'homothétie de centre Ω' et de rapport 3.

1) Déterminer les expressions analytiques des t, h et h'.

2) Déterminer les expressions analytique de toh' et hoh' et déterminer la nature de chacune d'elles.

Exercice 7 (N.C)

Soient deux sphères S et S'

M un point variable de S et M' un point variable de S'.

Déterminer l'ensemble des points M et des points M' sachant que $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$ où $\vec{V}$ est un vecteur donné de l'espace.

Indication : Etudier $S' \cap S''$ où $S'' = t_{\vec{V}}(S)$

Exercice 8

Soit un tétraèdre ABCD dont les sommets B, C et D sont fixes et le sommet A est variable.

M, N et G désignent respectivement les milieux respectifs de [AB] ; [CD] et [MN].

Trouver les lieux géométriques des points M et G lorsque A décrit une droite $\mathcal{D}$ donnée puis lorsque A décrit un plan $\mathcal{P}$ donné.

Exercice 9

Soient $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs donnés de $\mathcal{W}$.

On donne trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ ayant un point commun O.

Construire un triangle dont les sommets A, B et C appartiennent respectivement aux plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ et tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{V_2}$

Exercice 10 (N.C)

Soit ABCDEFGH un cube de centre O ($\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$)

Les plans médiateurs des arêtes, découpent le cube en huit cubes (K_A) ; (K_B) ; (K_C) ; (K_D) ; (K_E) ; (K_F) ; (K_G) et (K_H), ayant chacun un des sommes du cube initial.

1) Montrer que ces huit cubes ont un sommet commun.

2) I, J et K désignent les milieux respectifs de [AB] ; [AD] et [AE].

Etudier l'image de (K_A) par $t_{\overrightarrow{AI}}$; $t_{\overrightarrow{AJ}}$; $t_{\overrightarrow{AK}}$ puis par $t_{\overrightarrow{AK}} \circ t_{\overrightarrow{AJ}} \circ t_{\overrightarrow{AI}}$

3) Soit S la symétrie centrale de centre O.

Comparer $S((K_A))$ et $t_{\overrightarrow{AO}}((K_A))$

Corrigés

Exercice 2

1) Pour tout point M de ξ on a :

$\vec{V} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AD}$

$= 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$

Ainsi $\vec{V}$ est un vecteur constant indépendant de M.

2) $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (2 + k)\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2+k}(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD})$; car $k \neq -2$

d'où l'existance et l'uncité du point G.

3) $k \neq -2$ et M un point de l'espace ξ.

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + kMD = (k + 2)\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = (k + 2)\overrightarrow{MG}$

4) a) $k = -2$; $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{V}$ (voir 1)) $\Leftrightarrow M' = t_{\vec{V}}(M)$

f est alors la translation de vecteur $\vec{V}$.

b) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$

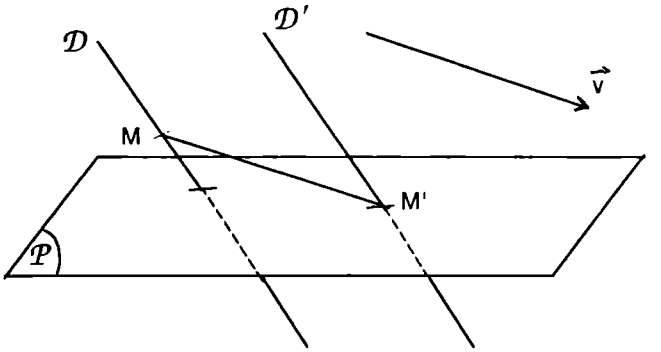
$f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{MD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = (k + 2)\overrightarrow{MG}$ (d'après 3) $k \neq -2$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = (k + 2)\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = (k + 1)\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = -(k + 1)\overrightarrow{GM}$

Ainsi f est l'homothétie de centre G et de rapport $(-k - 1)$.

Exercice 3



$\mathcal{D}' = t_{\vec{V}}(\mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{D}' // \mathcal{D}$; alors $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point M'.

Soit M le point tel que M' = $t_{\vec{V}}$(M). M est un point de la droite $\mathcal{D}$.

Ainsi il existe un point M unique de la droite $\mathcal{D}$ et un point unique M' de $\mathcal{P}$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$.

2) $N \in \mathcal{D}$ et $N' \in \mathcal{P}$ tels que $2\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{AN'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $N \in \mathcal{D}$ et $N' \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{AN'} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AN}$ $\Leftrightarrow$ $N \in \mathcal{D}$ et $N' \in \mathcal{P}$ et N' = h(N)

où h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-3}{2}$

Soit $\mathcal{D}' = h(\mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{D}' // \mathcal{D}$

alors $\mathcal{D}'$ coupe $\mathcal{P}$ en un point unique N' (car $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants).

Le point N est alors défini par : $N = h^{-1}(N')$.

Ainsi il existe un point unique N de $\mathcal{D}$ et un point unique N' de $\mathcal{P}$ tels que :

$2\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{AN'} = \vec{0}$

Exercice 4

1) Soient M, N deux points de l'espaced ξ.

$$\left.\begin{array}{l} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \quad \left.\begin{array}{l} h'(M') = M'' \\ h'(N') = N'' \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{M''N''} = k'\overrightarrow{M'N'}$$

h'oh (M) = M'' et h'oh(N) = N'' d'où $\overrightarrow{M''N''} = k'k\overrightarrow{MN}$

Comme $kk' \neq 1$ et $kk' \neq 0$ alors h'oh est une homothétie de rapport k'k.

2) $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

a) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$; donc les bipoints (A', B') et (B, A) sont équipollents c'est à dire [A'A] et [B'B] ont même milieu.

$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA}$; donc [A'A] et [C'C] ont même milieu d'où les segments [AA'] ; [BB'] et [CC'] ont même milieu I.

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$$

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA_1} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GA}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB_1} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GC_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC_1} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GC}$

Donc $A_1 = f(A)$; $B_1 = f(B)$; $C_1 = f(C)$ où f est l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{-1}{2}$

c) $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA_1}$; $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB_1}$; $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC_1}$

donc $A' = g(A_1)$; $B' = g(B_1)$; $C' = g(C_1)$ où g est l'homothétie de centre O et de rapport 2.

d) f est une homothétie de rapport $\frac{-1}{2}$ et g est une homothétie de rapport 2 ; donc gof est une homothétie de rapport - 1, c'est à dire gof est une symétrie centrale de centre I car gof(A) = A' et I étant le milieu de [AA'].

Exercice 5

Soient M(x, y, z) et M' (x', y', z') deux points de ξ.

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \\ z' = z + 3 \end{cases}$$

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = 3\,\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 8 \\ y' = 3y - 10 \\ z' = 3z - 14 \end{cases}$$

2) a) $\mathcal{D} \begin{cases} x = 4 + 3\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$ $A(4, 1, 2) \in D$

$t(A) = A'$ avec $A'(6, 2, 5)$; $\mathcal{D}'$ est la droite parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par A'.

Donc $\mathcal{D}' \begin{cases} x = 6 + 3\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 5 - \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

$A'' = h(A)$ avec $A''(4, -7, -8)$; $\mathcal{D}''$ est la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A".

Donc $\mathcal{D}'' \begin{cases} x = 4 + 3\alpha \\ y = -7 + 2\alpha \\ z = -8 - \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

b) $\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$

$B(1, 0, 0) \in \mathcal{P}$; $t(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$, le plan $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par B'

avec $B' = t_u(B)$; B' (3, 1, 3).

Donc $\mathcal{P}' : x + y + z + d = 0$ avec $B' \in \mathcal{P}'$; d'où $\mathcal{P}' : x + y + z - 7 = 0$

$h(\mathcal{P})$ est le plan $\mathcal{P}''$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par B" avec B" = h(B) ; B" (- 5 , -10 , -14)

d'où $\mathcal{P}'' : x + y + z + d' = 0$ avec $B'' \in \mathcal{P}''$ donc $\mathcal{P}'' : x + y + z + 29 = 0$

3) $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 13 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$

donc (S) est la sphère de centre I(1, -2, 3) et de rayon 3

t(S) est la sphère (S') de centre I' = t(I) et de rayon 3 avec I' (3, - 1, 6)

h(S) est la sphère (S") de centre I" = h(I) et de rayon 9 = 3. 3 avec I" (- 5 , - 16 , - 5).

Exercice 9

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \{O\}$

$A \in \mathcal{P}$; $B \in \mathcal{Q}$; $C \in \mathcal{R}$ avec $\overrightarrow{AB} = \vec{V}_1$; $\overrightarrow{AC} = \vec{V}_2$

alors $B \in \mathcal{P}' \cap Q$ et $C \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{R}$ où $\mathcal{P}' = t_{\vec{V}_1}(\mathcal{P})$ et $\mathcal{P}'' = t_{\vec{V}_2}(\mathcal{P})$

alors $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}'$ et $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R}'$ où $\mathcal{Q}' = t_{-\vec{V}_1}(\mathcal{Q})$ et $\mathcal{R}' = t_{-\vec{V}_2}(\mathcal{R})$

alors $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}' \cap \mathcal{R}'$ A existe et est unique.

On construit les plans $\mathcal{Q}' = t_{-\vec{V}_1}(\mathcal{Q})$ et $\mathcal{R}' = t_{-\vec{V}_2}(\mathcal{R})$

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}' \cap \mathcal{R}' = \{A\}$ les points $B = t_{\vec{V}_1}(A)$ et $C = t_{\vec{V}_2}(A)$.

STATISTIQUE

Exercices

Exercice 1 (N.C)

a) Construire une série statistique à caractère quantitatif discret.

b) Construire une série statistique à caractère quantitatif continu.

c) Construire une série statistique à caractère qualitatif.

Exercice 2 (N.C)

Lors d'un contrôle de fabrication, les poids exprimés en grammes, de 40 pièces usinées sont :

200 ; 198 ; 198 ; 203 ; 201 ; 197 ; 199 ; 200 ; 200 ; 203 ; 204 ; 195 ; 196 ; 199 ; 200 ; 198 ; 202 ; 199 ; 201 ; 197 ; 198 ; 200 ; 202 ; 198 ; 199 ; 200 ; 198 ; 197 ; 201 ; 197 ; 202 ; 200 ; 196 ; 203 ; 204 ; 199 ; 201 ; 201 ; 198.

1) Classer ces données en un tableau définissant cette série.

2) Construire le diagramme des effectifs et celui des effectifs cumulés.

Exercice 3 (N.C)

Le taux du glucose sanguin déterminé chez 32 sujets est donné ci-dessous en g/l :

0,85	0,95	1,00	1,06	1,13	0,87	0,97	1,01
1,07	1,14	0,90	0,97	1,03	1,08	1,14	0,93
0,98	1,03	1,08	1,15	0,94	0,98	1,03	1,10
1,17	0,94	0,99	1,04	1,10	1,19	1,11	1,20

1) Quelle est l'étendue de cette série statistique ?

2) Donner la répartition en classes de cette série.

En déduire le tableau de distribution des fréquences de cette série.

Exercice 4 (N.C)

La vitesse du son en m/s dans différents métaux est donnée dans le tableau suivant :

Métal	Aluminium	Cuivre	Fer	Plom	Platine	Argent
Vitesse m/s	5000	3600	5100	1200	2700	2600

1) Quelle est la population étudiée dans cette série ?

2) quel est le caractère étudié ?

Exercice 5

Une entreprise qui exploite un parc de taxis a relevé pour cent d'entre eux, les distances qu'ils avaient parcourues au moment de leur mise à la réforme.

Distances (en milliers de km)	[80, 85 [	[85, 90 [	[90, 95 [	[95, 100 [	[100,105[	[105, 110[	[110,115[	115 et plus
Nombre de taxis	5	9	14	18	25	16	7	6

1) Déterminer la distance médiane et la distance moyenne de cette série statistique.

2) Calculer l'écart-type.

Exercice 6 (N.C)

On donne la répartition du nombre des exploitants des terres agricoles (en meilliers) par la taille d'exploitation (en hectars) "source : enquête agricole de base - Déc.1980".

Taille d'exploitation	[0 , 5 [	[5 , 10 [	[10 , 20 [	[20 , 50 [	[50 , 100 [	100 et plus
Nombre d'exploitants	149,6	75,8	70,6	44,1	10,5	4,4

1) Construire l'histogramme de cette série statistique.

2) Construire le polygone des fréquences cumulées.

3) Déterminer la médiane, la moyenne et la variance de cette série statistique.

Exercice 7

On considère un échantillon de 1000 assurés pris parmi ceux qui n'ont aucun accident pendant une année.

Le tableau ci-après indique la distribution de ces assurés suivant les tranches d'âge.

Tranches d'âge	[20 , 25 [	[25 , 35 [	[35 , 40 [	[40 , 45 [	[45 , 50 [	[50 , 55 [	[55 , 65 [	[65 , 75 [
Effectifs	20	270	270	229	110	85	14	2

1) Construire l'histogramme de cette série statistique

2) Déterminer la médiane, la moyenne et la variance de cette série.

Exercice 8 (N.C)

On considère la répartition de la population de la Tunisie par âge et sexe au 1er Juillet 1989. (L'unité étant le millier)

Groupe d'âge	Masculin	Féminin	Ensemble
[0 , 10 [	1046,301	990,347	2036,648
[10 , 20 [	914,223	881,431	1795,654
[20 , 30 [	709,887	704,383	1414,270
[30 , 40 [	467,840	483,205	951,045
[40 , 50 [	281,928	297,438	579,36
[50 , 60 [	280,532	264,378	544,910
[60 , 70 [	183,956	167,213	351,169
[70 , 80 [	98,691	77,801	176,492
80 et plus	30,452	29,549	60,001

1) Déterminer le pourcentage de la population masculine par groupe d'âge.

2) Construire les histogrammes des séries statistiques correspondantes respectivement à la population masculine et féminine.

Exercice 9

Deux classes composent sur un même sujet de mathématiques, mais n'ont pas le même correcteur.

Voici les notes lues dans l'ordre alphabétique des copies.

Classe A : 15 ; 11 ; 5 ; 5 ; 8 ; 11 ; 3 ; 11 ; 5 ; 8 ; 8 ; 3 ; 14 ; 8 ; 16 ; 11 ; 14 ; 11 ; 8 ; 15

Classe B : 3 ; 13 ; 1 ; 7 ; 11 ; 13 ; 2 ; 7 ; 11 ; 7 ; 14 ; 3 ; 3 ; 2 ; 7 ; 3 ; 14 ; 2 ; 3 , 14

On définit ainsi deux séries statistiques.

1) Représenter ces deux séries statistiques dans deux tableaux de façon à faire apparaître pour la classe A (resp la classe B) les notes x_i (resp y_j) dans l'ordre strictement croissant et les effectifs n_i (resp m_j) correspondants.

2) Calculer la moyenne et l'écart type de chacune des deux séries statistiques.

3) On pose $z_j = ay_j + b$

Déterminer les réels a et b pour que la série statistique (z_j , m_j) ait la même moyenne et le même écart-type que la série (x_i , n_i).

Exercice 10

Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé de diamètre théorique 25mm.

On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication.

Les mesures des diamètres ont donné les résultats suivants :

Classe par diamètres	[24,0 ; 24,2 [	[24,2 ; 24,4 [	[24,4 ; 24,6 [	[24,6 ; 24,8 [	[24,8 ; 25,0 [
Effectifs	0	5	13	24	19
Classe par diamètres	[25,0 ; 25,2 [	[25,2 ; 25,4 [	[25,4 ; 25,6 [	[25,6 ; 25,8 [	[25,8 ; 26,0 [
Effectifs	14	10	8	5	2

1) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{x}$ et l'écart-type σ de la série statistique obtenue.

2) La production de la machine est jugée bonne si la série des mesures de l'échantillon remplit les trois conditions suivantes :

a) La moyenne $\overline{x}$ appartient à l'intervalle [24, 6 ; 25, 1]

b) L'écart-type σ est strictement inférieur à 0,4.

c) 90% au moins, de l'effectif figure dans l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma , \overline{x} + 2\sigma]$.

La production de la machine est-elle bonne ?

Exercice 11

Une entreprise de fabrication d'objets artisanaux a un effectif de 100 ouvriers.

Chaque objet est fabriqué entièrement par un même ouvrier, cela nécessite une certaine durée de travail variable en fonction de la qualification et de l'habilité des ouvriers.

On donne la répartition des 100 ouvriers selon le temps nécessaire pour réaliser entièrement un objet artisanal.

Catégorie	Temps (mn)	Nombre d'ouvrier
I	[110, 130 [	2
II	[130, 170 [	20
III	[170 , 230 [	35
IV	[230 , 250 [	25
V	[250 , 350 [	10
VI	350 et plus	5
	Total	**100**

1) Représenter graphiquement cette série statistique.

2) Déterminer le mode, la moyenne arithmétique et la médiane de cette série statistique.

3) Les ouvriers sont payés à raison de 0,5 dinars par l'heure plus une prime variable selon le rendement de 1 dinar pas objet réalisé. Tous les ouvriers travaillent 40 heures par semaine.

Calculer le coût moyen en main d'œuvre de l'objet par catégorie d'ouvrier.

Exercice 12 (N.C)

On considère des séries d'effectifs portant sur le même caractère quantitatif.

x_i	1	2	3	5
n_i	1	4	2	1

y_j	1	3	4	5
m_j	1	1	3	1

z_k	1	2	3	4	5
p_k	2	4	3	3	2

1) a) Calculer les effectifs totaux $n = \sum_{i=1}^{4} n_i$ et $m = \sum_{j=1}^{4} m_j$

Calculer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ puis les écarts-types σ_x et σ_y

b) Expliquer la construction de la série (z_k , p_k) (on dit que l'on a regroupé les séries (x_i , n_i) et (y_j , m_j)).

Déterminer la moyenne $\bar{z}$ ainsi que l'écart-type σ_z

2) Plus généralement, notons (z_k , p_k) la série obtenue par le regroupement des séries (x_i , n_i) et (y_j , m_j).

a) Montrer que $\bar{z} = \dfrac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m}$

b) Montrer que $(\sigma_z)^2 = \dfrac{n(\sigma_x)^2 + m(\sigma_y)^2}{n + m} + \dfrac{n.m}{(n + m)^2} (\bar{x} - \bar{y})^2$

Corrigés

Exercice 5

1) Dressons le tableau des effectifs cumulés croissants.

Distance	85	90	95	100	105	110	115	120
$E_i \nearrow$	5	14	28	46	71	87	94	100

L'effectif total de cette série est n = 100 ; alors $\frac{n}{2} = 50$

Pour chercher la distance qui correspond à l'effectif cumulé 50 ; on procède par interpolation linéaire.

L'effectif cumulé associé à 100 est 46 et celui associé à 105 est 71.

L'effectif cumulé associé à la médiane M_e est 50.

On suppose que l'accroissement de l'effectif cumulé est linéaire dans la classe [100,105] ; la médiane M_e vérifie alors : $\frac{M_e - 100 \cdot 10^3}{50 - 46} = \frac{(105 - 100)\, 10^3}{71 - 46}$

$$M_e = (4 \frac{1}{5} + 100)\, 10^3$$

$$\boxed{M_e = 100800 \text{ Km}}$$

La distance moyenne de cette série est $\bar{x}$: $\bar{x} = \frac{1}{100} \sum n_i c_i$

où n_i est l'effectif de $i^{ème}$ classe et c_i le centre de la $i^{ème}$ classe

Soit **x = 100 250 Km**

2)

c_i	82,5	87,5	92,5	97,5	102,5	107,5	112,5	117,5
c_i^2	6806,25	7656,25	8556,25	9506,25	10506,25	11556,25	12656,25	13806,2
n_i	5	9	14	18	25	16	7	6

La variance V de cette série est définie par : $V = \frac{1}{100} \sum n_i c_i^2 - (\bar{x})^2$

Soit $V = 78{,}1875 \cdot 10^6$

Soit l'écart-type $\sigma = \sqrt{V} = 8842{,}3$ Km

Exercice 6

Nous remarquons d'abord que les classes de cette série statistique (ici tranches d'âge) ne sont pas toutes de même amplitude.

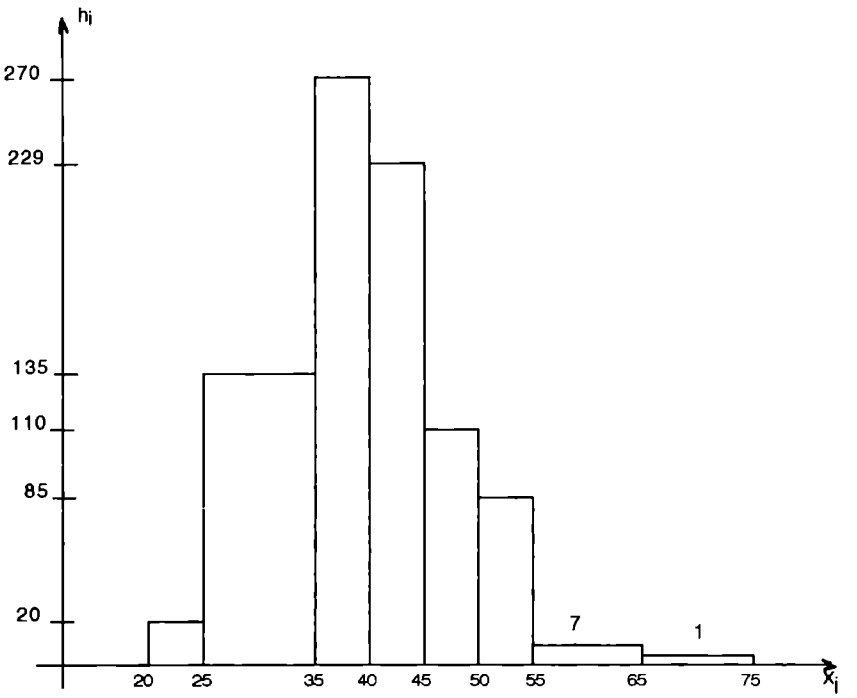
On considère 5 ans comme unité d'âge.

La répartition de ces assurés par unité d'âge sera :

Tranches d'âge	[20, 25[	[25, 35[	[35, 40[	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 65[	[65, 75[
Effectifs par unité	20	135	270	229	110	85	7	1

On rappelle que l'histogramme d'une série statistique (en particulier à classes d'amplitudes inégales) est défini de telle sortes que les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs correpsondants.

On peut alors prendre les hauteurs des rectangles égales aux effectifs par unité de classe, soit :



2) On considère le tabelau des effectifs cumulés croissants :

Age	25	35	40	45	50	55	65	75
E_i ↗	20	290	560	789	899	984	998	1000

Le nombre total des assurés étant 1000.

La médiane est alors l'âge qui correspond à l'effecif cumulé 500.

L'effectif cumulé associé à 35 ans est 290 et l'effectif cumulé associé à 40 ans est 560.

La médiane M_e appartient alors à la classe [35 , 40 [

$$\frac{M_e - 35}{500 - 290} = \frac{40 - 35}{560 - 290}$$

Soit $M_e = \frac{1}{54}\ 210 + 35$

$$\boxed{M_e = 38{,}89 \text{ ans}}$$

Soit $\bar{x}$ la moyenne de cette série ; on a : $\bar{x} = \frac{1}{1000} \sum n_i c_i$

où n_i est l'effectif de la $i^{ème}$ classe et c_i le centre de la $i^{ème}$ classe

$$\boxed{\bar{x} = 39{,}075 \text{ ans}}$$

Soit V la variance de cette série ; on a : $V = \frac{1}{1000} \sum n_i c_i^2 - (\bar{x})^2$

$$\boxed{V = 62{,}256}$$

Exercice 9

1) a) Série statistique relative à la classe A.

Notes x_i	3	5	8	11	14	15	16
Effectifs n_i	2	3	5	5	2	2	1
x_i^2	9	25	64	121	196	225	256

b) Série statistique relative à la classe B.

Notes y_j	1	2	3	7	11	13	14
Effectifs m_j	1	3	5	4	2	2	3
y_j^2	1	4	9	49	121	169	196

2) La moyenne x des notes de la classe A est : $\overline{x} = \frac{1}{20} \sum n_i x_i = 9,5$

L'écart-type σ_X relatif à la classe A est $\sigma_X = \sqrt{15,55} = 3,9433$

De même pour la classe B on trouve $\overline{y} = 7$ et $\sigma_y = 4,70$

3) Les variables statistiques Y et Z prennent leurs valeurs de façon que :

Pour tout $i \in \{ 1, 2, \ldots, 7 \}$ on a $z_i = ay_i + b$

On vérifie que $\overline{z} = a\overline{y} + b$ et $\sigma_Z = | a | \sigma_y$

La variable Z doit vérifier le système : $\begin{cases} \overline{z} = \overline{x} \\ \sigma_Z = \sigma_X \end{cases}$

D'où $\begin{cases} a\overline{y} + b = \overline{x} \\ | a | \sigma_y = \sigma_X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\overline{y} + b = \overline{x} \\ | a | = \dfrac{\sigma_X}{\sigma_y} \end{cases}$

Soit $| a | = \frac{3,9433}{4,70} = 0,839$ d'où $a = \pm 0,839$

si $a = 0,839$ alors $b = \overline{x} - a\overline{y} = 3,627$

si $a = - 0,839$ alors $b = 15,373$

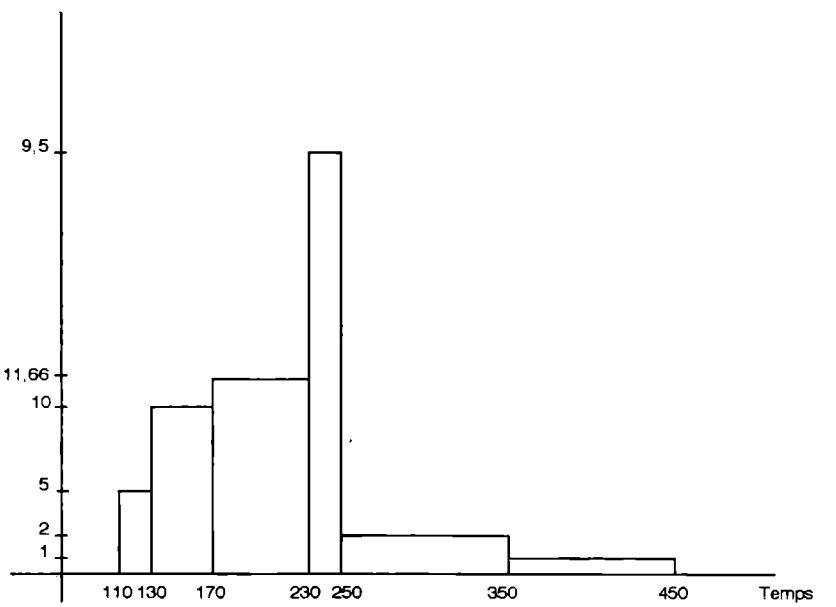
Ainsi pour que les variables statistiques Z et X aient la même moyenne et le même écart-type. Il faut et il suffit que le couple (a, b) appartienne à l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{ (0,839 ; 3,627) \quad ; \quad (- 0,839 ; 15,373) \}$$

Exercice 11

Temps (mn)	n_i	n_i/unité	c_i	E_i
[110, 130 [	5	8	120	5
[130, 170 [	20	10	150	25
[170 , 230 [	35	11,66	200	60
[230 , 250 [	25	25	240	85
[250 , 350 [	10	2	300	95
[350 , 450 [	5	1	400	100

On remarque que n_i/unité signifie l'effectif des ouvriers par unité d'amplitude de la classe (ici 20 mn).



2) La classe modale de cette série est [230 , 250 [

La moyenne arithmétique de cette série est : $\overline{x} = \frac{1}{100} \quad \sum n_i c_i = 216$ mn

La médiane M_e de cette série est situé dans la classe [170 , 230 [. L'effectif cumulé croissant associé à la valeur 170 est 25 et celui associé la valeur 230 est 60.

D'où $M_e = 170 + (50 - 25) \frac{230 - 170}{60 - 25}$

Soit $M_e = 212{,}86$ mn

3) Le coût moyen en main d'œuvre d'un objet par catégorie d'ouvrier est défini comme étant le salaire d'un ouvrier de cette catégorie au bout d'une semaine, divisé par le nombre d'objets fabriqués par cet ouvrier pendant une semaine.

Or le salaire S d'un ouvrier en une semaine est défini par :

$S = 20^D$ + (nombre d'objets fabriqués par semaine) x 1^D

Le nombre d'objets fabriqués en une semaine est défini par le rapport $\frac{2400}{c_i}$;

(2400 mn = 40 h et c_i étant le centre de la classe relative à la catégorie concernée.)

Ainsi le coût moyen en main d'œuvre d'un objet de la catégorie i (noté C.M.O/c_i) ;

$1 \leq i \leq 6 \quad : \quad C.M.O/c_i = (20 + \frac{2400}{c_i}) \frac{c_i}{2400} = 1 + c_i \frac{1}{120}$

Catégorie	c_i mn	Coût moyen d'un objet en D
I	120	2
II	150	2,250
II	200	2,667
IV	240	3
V	300	3,5
VI	400	4,334

دار آفاق للنشر و التوزيع
ص ب 4 منفلوري – 1089 تونس الشابي
(01) 222 431 : ☎

Exercices et Problèmes Corrigés de mathématiques

6e maths - sc-exp. - tech.

Prix : 4D,200